5.6 Gleichsetzungsverfahren

Verfahren: Beide Gleichungen des Gleichungssystems werden nach derselben Variablen aufgelöst und die entsprechenden Terme werden einander **gleichgesetzt**.

Beispiele ($G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$)

a) (1) $5x + 2y = 11$
(2) $3x - y = 11$

❶ **Definitionsmenge**

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Ausrechnen und ordnen**

Beide Gleichungen nach einer Variablen (hier: y) auflösen:

(1) $5x + 2y = 11 \quad | - 5x$

$2y = 11 - 5x \quad | : 2$

$\underline{y = 5.5 - 2.5x}$

(2) $3x - y = 11 \quad | - 3x$

$-y = 11 - 3x \quad | \cdot (-1)$

$\underline{y = 3x - 11}$

❸ **Eliminieren einer Variablen**

Die berechneten Terme einander **gleichsetzen**:
hier $y = \mathbf{5.5 - 2.5x}$ aus Gleichung (1) und $y = \mathbf{3x - 11}$ aus Gleichung (2)

$5.5 - 2.5x = 3x - 11$

❹ **1. Variable ausrechnen**

$5.5 - 2.5x = 3x - 11 \quad | + 2.5x$

$5.5 = 5.5x - 11 \quad | + 11$

$16.5 = 5.5x \quad | : 5.5$

$\underline{x = 3}$

❺ **2. Variable ausrechnen**

Berechnete Variable in einer Gleichung einsetzen (hier: x in Gleichung (2)):

$y = 3x - 11$ und $x = 3$

$y = 3 \cdot 3 - 11$

$\underline{y = -2}$

❻ **Lösungsmenge**

$L = \{ (3 / -2) \}$

b) (1) $2x + 3y = 6$
(2) $4x - 2y = -24$

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❶ **Definitionsmenge**
$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Ausrechnen und ordnen**
(1) $2x + 3y = 6$ ➔ $2x = -3y + 6$ ➔ $x = -1.5y + 3$
(2) $4x - 2y = -24$ ➔ $4x = 2y - 24$ ➔ $x = 0.5y - 6$

❸ **Eliminieren einer Variablen**
$-1.5y + 3 = 0.5y - 6$

❹ **1. Variable ausrechnen**
$-1.5y + 3 = 0.5y - 6$ | $+ 1.5y, + 6$
$9 = 2y$ | $: 2$
$\underline{y = 4.5}$

❺ **2. Variable ausrechnen**
$x = 0.5y - 6$
$x = 0.5 \bullet 4.5 - 6$
$x = 2.25 - 6$
$\underline{x = -3.75}$

❻ **Lösungsmenge**
$L = \{ (-3.75 / 4.5) \}$

$$L = \left\{ \left(-3\frac{3}{4} / 4\frac{1}{2} \right) \right\}$$

c) (1) $6x + 2y = 3$
(2) $4x - y = -12$

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❶ **Definitionsmenge**
$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Ausrechnen und ordnen**
(1) $6x + 2y = 3$ ➔ $2y = -6x + 3$ ➔ $y = -3x + 1.5$
(2) $4x - y = -12$ ➔ $y = 4x + 12$

❸ **Eliminieren einer Variablen**
$-3x + 1.5 = 4x + 12$

❹ **1. Variable ausrechnen**
$-3x + 1.5 = 4x + 12$ | $+ 3x, - 12$
$-10.5 = 7x$ | $: 7$
$\underline{x = -1.5}$

❺ **2. Variable ausrechnen**
$y = 4x + 12$
$y = 4 \bullet (-1.5) + 12$
$y = -6 + 12$
$\underline{y = 6}$

❻ **Lösungsmenge**
$L = \{ (-1.5 / 6) \}$

$$L = \left\{ \left(-1\frac{1}{2} / 6 \right) \right\}$$

6.4.3 pq-Formel

Neben den beiden mathematischen Methoden der Faktorzerlegung und der quadratischen Ergänzung gibt es auch Lösungsmethoden, die auf Formeln basieren: die pq- und die abc-Formel der quadratischen Gleichungen.

Haben wir eine quadratische Gleichung, bei der vor dem x^2 der Faktor 1 steht, lässt sich die pq-Lösungsformel anwenden.

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

$$\boxed{x_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

(Die mathematische Herleitung der pq-Formel können Sie im Kapitel 6.4.4 nachvollziehen.)

Allgemeines Lösungsvorgehen:

❶ Definitionsmenge bestimmen

❷ Werte für p und q bestimmen

❸ Werte für p und q in der Formel einsetzen

❹ Variablen x_1 / x_2 ausrechnen

❺ Lösungsmenge bestimmen

Beispiele (G = ℝ)

a) $x^2 + 4x - 221 = 0$

❶ D = ℝ

❷ Da x^2 alleine steht (also eigentlich mit dem Faktor 1), lässt sich die pq-Formel anwenden. Wir bestimmen zuerst p und q.

$$x^2 \underbrace{+\ 4}_{p}x \underbrace{-\ 221}_{q} = 0$$

Die **Vorzeichen** gehören zu p und q dazu.

❸ Die Werte für p und q in der Formel einsetzen:

$$x_{1,2} = -\left(\frac{4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-221)}$$

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 221}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{225}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 15$$

$\Rightarrow x_1 = -2 - 15, \quad x_2 = -2 + 15$

$\Rightarrow x_1 = \underline{-17}, \quad x_2 = \underline{13}$

❺ L = { −17, 13 }

b) $2x^2 - 6x = -2$

❶ $D = \mathbb{R}$

❷ Durch Umformen erhalten wir:

$2x^2 - 6x = -2 \quad | +2$

$2x^2 - 6x + 2 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x^2 \underbrace{-\ 3}_{p}x \underbrace{+\ 1}_{q} = 0$$

❸ Die Werte für p und q in der Formel einsetzen:

$$x_{1,2} = -\left(\frac{-3}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 1}$$

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen:

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{2.25 - 1}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{1.25}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm 1.118...$

$\Rightarrow x_1 = 1.5 - 1.118...,\quad x_2 = 1.5 + 1.118...$

$\Rightarrow x_1 = \underline{0.381...},\quad x_2 = \underline{2.618...}$

❺ $L = \{ 0.38, 2.62 \}$

c) $x^2 - 3x = 54$

$D = \mathbb{R}$

❶ $D = \mathbb{R}$

❷ $x^2 - 3x = 54$

$x^2 - 3x - 54 = 0$

$$x^2 \underbrace{-\ 3}_{p}x \underbrace{-\ 54}_{q} = 0$$

❸ $$x_{1,2} = -\left(\frac{-3}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - (-54)}$$

❹ $x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{2.25 + 54}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{56.25}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm 7.5$

$\Rightarrow x_1 = \underline{-6},\quad x_2 = \underline{9}$

❺ $L = \{ -6, 9 \}$

$L = \{ -6, 9 \}$

c) Die Differenz zweier natürlicher Zahlen beträgt 24. Ihre Summe ist 10 Mal so gross wie der Quotient der grösseren durch die kleinere Zahl.
Wie heissen die beiden Zahlen?

❶ Analyse

grössere Zahl	□	Differenz: 24
kleinere Zahl	△	

Summe	□ + △	10 Mal so gross
Quotient	$\frac{\square}{\triangle}$	

❷ Summe der [beiden Zahlen] = [Quotient der Zahlen] • **10**

❸ x = kleinere Zahl / x + 24 = grössere Zahl

❹ $x + (x + 24) = 10\left(\frac{x+24}{x}\right)$

❺ $D = \mathbb{N}$

$x + (x + 24) = 10\left(\frac{x+24}{x}\right)$ | • x

$x(2x + 24) = 10(x + 24)$ | ausmultiplizieren

$2x^2 + 24x = 10x + 240$ | – 10x, – 240

$2x^2 + 14x - 240 = 0$ | : 2

$x^2 + 7x - 120 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (-120)}$

$x_{1,2} = -3.5 \pm \sqrt{12.25 + 120}$

$x_{1,2} = -3.5 \pm \sqrt{132.25}$

$x_{1,2} = -3.5 \pm 11.5$

$\Rightarrow x_1 = \underline{-15}, \quad x_2 = \underline{8}$ ➔ x_1 fällt als Lösung weg, da nicht in D enthalten

❻ Die gesuchten Zahlen lauten: **8** und **32**.

❼ Probe:

Summe:	(32 + 8)	=	40
Quotient:	32 : 8	=	<u>4</u>
Die Summe ist 10 Mal so gross wie der Quotient			☑

d) Zähler und Nenner eines Bruches ergeben zusammen 21. Zählt man zum Zähler und Nenner je die Zahl 7 dazu, erhält der Bruch den Wert $\frac{3}{4}$.

Wie heisst der Bruch?

❶ Analyse

(1) Zähler + Nenner = 21

(2) $\dfrac{\text{Zähler} + 7}{\text{Nenner} + 7} = \dfrac{3}{4}$

❷ (1) [Zähler] + [Nenner] = 21

(2) ([Zähler] **+ 7**) **:** ([Nenner] **+ 7**) = $\frac{3}{4}$

❸ x = Zähler
y = Nenner

❹ (1) $x + y = 21$

(2) $\dfrac{x+7}{y+7} = \dfrac{3}{4}$

❺ $D_x = \mathbb{Q}$, $D_y = \mathbb{Q} \setminus \{-7\}$
oder
$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{-7\}$

(1) $x + y = 21$
$x = -y + 21 \quad | \cdot 4 \quad \rightarrow \quad 4x = -4y + 84$

(2) $\dfrac{x+7}{y+7} = \dfrac{3}{4}$
$4(x + 7) = 3(y + 7)$
$4x + 28 = 3y + 21 \quad \rightarrow \quad 4x = 3y - 7$

Gleichsetzungsverfahren

$-4y + 84 = 3y - 7$
$84 = 7y - 7$
$91 = 7y$
$\underline{y = 13}$

$x + y = 21$
$x + 13 = 21$
$\underline{x = 8}$

❻ Der Bruch lautet $\frac{8}{13}$.

Aufgabe 4.5

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

a)	$2(x-3) = \frac{13-6x}{2}$	$D = \mathbb{Q}$	$L = \left\{2\frac{1}{2}\right\}$
b)	$\frac{3x+2}{6x-1} = \frac{x-2}{2x-7}$	$D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{1}{6},\ 3\frac{1}{2}\right\}$	$L = \{-4\}$
c)	$\frac{4}{2x-1} - \frac{3-x}{x+1} = 1$	$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$	$L = \{2\}$
d)	$\frac{5x-50}{x-6} - x = \frac{x^2-16}{6-x}$	$D = \mathbb{Q} \setminus \{6\}$	$x = 6$ $L = \{\ \}$
e)	$\frac{4}{4x+1} + \frac{2x+4}{x+2} = 2 + \frac{\frac{1}{4}}{2x+4}$	$D = \mathbb{Q} \setminus \{-2, -\frac{1}{4}\}$	$L = \left\{-2\frac{1}{4}\right\}$
f)	$\frac{10}{x-6} - \frac{3x-33}{2-2x} = 1.5$	$D = \mathbb{Q} \setminus \{1, 6\}$	$L = \{16\}$
g)	$\frac{2x-6}{x^2-36} + \frac{6}{x+6} = \frac{\frac{8}{3}}{2x-12}$	$D = \mathbb{Q} \setminus \{-6, 6\}$	$L = \left\{7\frac{1}{2}\right\}$
h)	$\frac{3}{x^2+10x+25} + \frac{3x+14}{2x+10} = \frac{\frac{9}{2}x + 6}{3x+15}$	$D = \mathbb{Q} \setminus \{-5\}$	$L = \left\{-5\frac{3}{5}\right\}$
i)	$\frac{5-x}{x^2-12x+36} = 1 - \frac{2x-9}{2x-12}$	$D = \mathbb{Q} \setminus \{6\}$	$L = \{8\}$
j)	$1 - \frac{5x-9}{x^2-9} = \frac{x-3}{x+3}$	$D = \mathbb{Q} \setminus \{-3, 3\}$	$L = \{9\}$

Aufgabe 8.9

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten.

	Aufgabe	Resultat
a)	$\dfrac{b}{a^2\,c^2} \bullet a^3c^3$	abc
b)	$\dfrac{a^2\,b^3}{c^2} \bullet \dfrac{c^4}{a\,b^2}$	abc^2
c)	$\dfrac{a^3\,b^4}{a^2} \bullet \dfrac{a^4}{a^2\,b^5}$	$a^3\,b^{-1}$
d)	$\dfrac{a^4\,b^2}{b^3} \bullet \dfrac{a^2\,b^4}{a\,b^2}$	$a^5\,b$
e)	$\dfrac{a^{-2}\,b^2}{c^3} \bullet \dfrac{a^2\,c^4}{b}$	bc
f)	$\dfrac{a^2\,b^{-3}}{b^2} \bullet \dfrac{a^{-1}}{b^{-4}}$	ab^{-1}
g)	$\dfrac{2\,a^{-2}\,b^{-2}}{8\,c^2} \bullet \dfrac{4\,c^3}{a\,b^{-2}}$	$a^{-3}\,c$
h)	$\dfrac{15\,a^3\,b}{c^{-4}} \bullet \dfrac{a^{-2}\,(9b)^{-1}}{5\,c^3}$	$\dfrac{1}{3}ac$
i)	$\dfrac{3\,a^4\,b^{-3}}{2\,c^2} \bullet \dfrac{a\,(4b)^2}{6\,c^{-3}}$	$4a^5\,b^{-1}\,c$
j)	$\dfrac{(4a)^2\,b^{-2}}{2\,c^3} \bullet \dfrac{4\,b\,c}{(2a)^3}$	$4a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-2}$
k)	$\dfrac{(-6a)^2\,b^{-4}}{-a^3\,b^{-5}} \bullet \dfrac{6^{-3}\,a\,b}{a^{-2}}$	$-\dfrac{1}{6}a^2\,b^2$
l)	$\dfrac{9a^{-6}\,b^{-12}}{4^{-2}\,a^{-1}\,b^{-8}} \bullet \dfrac{2^{-4}\,b^4}{(3a)^3}$	$\dfrac{1}{3}a^{-8}$

Aufgabe 10.8

Bestimmen Sie folgende Logarithmen.

a)	$\log_a a$	1	b)	$\log_a a^2$	2
c)	$\log_a a^5$	5	d)	$\log_a \frac{1}{a}$	-1
e)	$\log_a \frac{1}{a^2}$	-2	f)	$\log_a \sqrt{a}$	$\frac{1}{2}$
g)	$\log_a \sqrt[3]{a}$	$\frac{1}{3}$	h)	$\log_a \sqrt[3]{a^2}$	$\frac{2}{3}$
i)	$\log_a \sqrt[3]{a^{27}}$	9	j)	$\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$	$-\frac{1}{2}$
k)	$\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$	$-\frac{1}{3}$	l)	$\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$	$-\frac{2}{3}$
m)	$\log_a \frac{a}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{2}$	n)	$\log_a \frac{a^2}{\sqrt{a}}$	$\frac{3}{2}$
o)	$\log_a \frac{\sqrt{a}}{a}$	$-\frac{1}{2}$	p)	$\log_a \frac{\sqrt{a}}{a^3}$	$-\frac{5}{2}$
q)	$\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{a^2}$	$-\frac{5}{3}$	r)	$\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$	$\frac{1}{12}$

Aufgabe 10.9

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a)	$\log_4 16 = x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{2\}$
b)	$\log_5 125 = x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{3\}$
c)	$\log_6 7'776 = x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{5\}$
d)	$\log_3 1 = x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{0\}$
e)	$\log_6 36 = 2x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{1\}$
f)	$\log_3 81 = 2x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{2\}$
g)	$\log_3 729 = 6x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{1\}$
h)	$\log_4 1'024 = 3x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{1\frac{2}{3}\right\}$
i)	$\log_{10} 100'000 = 10x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
j)	$\log_5 25^{-1} = x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-2\}$
k)	$\log_2 16^{-2} = 5x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-1\frac{3}{5}\right\}$
l)	$\log_3 9^{-5} = 4x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-2.5\}$
m)	$\log_7 \frac{1}{49} = x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-2\}$
n)	$\log_5 \frac{1}{625} = x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-4\}$
o)	$\log_3 \frac{1}{3} = 2x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
p)	$\log_{10} \frac{1}{10} = 2x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
q)	$3 \bullet \log_{1.5} 2.25 = 3x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{2\}$
r)	$\log_a \frac{1}{\sqrt{a^3}} = x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-1\frac{1}{2}\right\}$
s)	$\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$
t)	$\log_a \frac{a^4}{\sqrt{a^5}} = x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{1\frac{1}{2}\right\}$
u)	$3^{\log_3 \frac{1}{9}} = x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{\frac{1}{9}\right\}$