5.6 Gleichsetzungsverfahren

Verfahren: Beide Gleichungen des Gleichungssystems werden nach derselben Variablen aufgelöst und die entsprechenden Terme werden einander **gleichgesetzt**.

Beispiele ($G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$)

a) (1) $5x + 2y = 11$
(2) $3x - y = 11$

❶ **Definitionsmenge**

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Ausrechnen und ordnen**

Beide Gleichungen nach einer Variablen (hier: y) auflösen:

(1) $5x + 2y = 11 \qquad | -5x$

$2y = 11 - 5x \qquad | :2$

$\underline{y = 5.5 - 2.5x}$

(2) $3x - y = 11 \qquad | -3x$

$-y = 11 - 3x \qquad | \bullet(-1)$

$\underline{y = 3x - 11}$

❸ **Eliminieren einer Variablen**

Die berechneten Terme einander **gleichsetzen**:
hier $y = \mathbf{5.5 - 2.5x}$ aus Gleichung (1) und $y = \mathbf{3x - 11}$ aus Gleichung (2)

$5.5 - 2.5x = 3x - 11$

❹ **1. Variable ausrechnen**

$5.5 - 2.5x = 3x - 11 \qquad | +2.5x$

$5.5 = 5.5x - 11 \qquad | +11$

$16.5 = 5.5x \qquad | :5.5$

$\underline{x = 3}$

❺ **2. Variable ausrechnen**

Berechnete Variable in einer Gleichung einsetzen (hier: x in Gleichung (2)):

$y = 3x - 11$ und $x = 3$

$y = 3 \bullet 3 - 11$

$\underline{y = -2}$

❻ **Lösungsmenge**

$L = \{(3 / -2)\}$

b) (1) $2x + 3y = 6$

(2) $4x - 2y = -24$

D =

L =

c) (1) $6x + 2y = 3$

(2) $4x - y = -12$

D =

L =

6.4.3 pq-Formel

Neben den beiden mathematischen Methoden der Faktorzerlegung und der quadratischen Ergänzung gibt es auch Lösungsmethoden, die auf Formeln basieren: die pq- und die abc-Formel der quadratischen Gleichungen.

Haben wir eine quadratische Gleichung, bei der vor dem x^2 der Faktor 1 steht, lässt sich die pq-Lösungsformel anwenden.

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

$$\boxed{x_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

(Die mathematische Herleitung der pq-Formel können Sie im Kapitel 6.4.4 nachvollziehen.)

Allgemeines Lösungsvorgehen:

❶ Definitionsmenge bestimmen
❷ Werte für p und q bestimmen
❸ Werte für p und q in der Formel einsetzen
❹ Variablen x_1 / x_2 ausrechnen
❺ Lösungsmenge bestimmen

Beispiele (G = ℝ)

a) $x^2 + 4x - 221 = 0$

❶ D = ℝ

❷ Da x^2 alleine steht (also eigentlich mit dem Faktor 1), lässt sich die pq-Formel anwenden. Wir bestimmen zuerst p und q.

$$x^2 \underbrace{+\ 4}_{p}x \ \underbrace{-\ 221}_{q} = 0$$

Die **Vorzeichen** gehören zu p und q dazu.

❸ Die Werte für p und q in der Formel einsetzen:

$$x_{1,2} = -\left(\frac{4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-221)}$$

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 221}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{225}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 15$$

$\Rightarrow x_1 = -2 - 15, \quad x_2 = -2 + 15$

$\Rightarrow x_1 = \underline{-17}, \quad x_2 = \underline{13}$

❺ L = { −17, 13 }

b) $2x^2 - 6x = -2$

❶ $D = \mathbb{R}$

❷ Durch Umformen erhalten wir:

$2x^2 - 6x = -2 \qquad | +2$

$2x^2 - 6x + 2 = 0 \qquad | :2$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x^2 \underbrace{-\ 3}_{p}x \underbrace{+\ 1}_{q} = 0$$

❸ Die Werte für p und q in der Formel einsetzen:

$$x_{1,2} = -\left(\frac{-3}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 1}$$

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen:

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{2.25 - 1}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{1.25}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm 1.118...$

$\Rightarrow x_1 = 1.5 - 1.118...,\qquad x_2 = 1.5 + 1.118...$

$\Rightarrow x_1 = \underline{0.381...},\qquad x_2 = \underline{2.618...}$

❺ $L = \{ 0.38, 2.62 \}$

c) $x^2 - 3x = 54$

D =

L =

Aufgabe 8.11

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten.

a) $\frac{a^4 b^3}{a} : a^2 b^2$

b) $\frac{a^2 b^3}{c^2} : \frac{a^3 b^2}{c^3}$

c) $\frac{a^3 b^2}{b^4} : \frac{a^4 b}{b^3}$

d) $\frac{a^3 b}{b^3} : \frac{a^2 b^2}{a}$

e) $\frac{a^{-2} b^2}{b^{-3}} : \frac{a b^4}{a^4}$

f) $\frac{4 a^4 b^{-2}}{5 c^{-2}} : \frac{2 b^{-2}}{5 a^2 c^3}$

g) $\frac{4 a^{-2}}{b^2 c^{-3}} : \frac{(2a)^2}{b^{-2} (2c)^{-3}}$

h) $\frac{(3a)^3 b^4}{c^{-2}} : \frac{3a^{-1} b^3}{c^{-3}}$

i) $\frac{-2^2 a^3 b^4}{b^{-2}} : \frac{(-4)^2 a^{-1}}{b^{-1}}$

Aufgabe 8.12

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten.

a) $\frac{a^{n+1} b^3}{c^n} : \frac{a^n b^2}{c^{n+1}}$

b) $\frac{a^{2n-1}}{b^{2n} c^{n-1}} : \frac{a^{n+1}}{b^n c^{n+1}}$

c) $\frac{a^{1-n} b^{2n}}{a^{3n}} : \frac{b^{n+1}}{a^{2n-1}}$

d) $\frac{a^{2n}}{b^{2n-1} c^{1-n}} : \frac{a^{n-1}}{b^{2-n} c^{n-2}}$

e) $\frac{a^2 b^{-2}}{a^3} : \frac{a^{-4}}{b^3}$

f) $\frac{a^{1-n} b^2}{b^{n-1}} : \frac{b^{2n}}{a^{2n}}$

g) $\frac{9 a^{2n} b^{n+1}}{a^{n-1}} : \frac{3 a^{n-2} b^{2n-1}}{b^{n+1}}$

h) $\frac{4 a^{n-1} b^{2n+2}}{6 b^{n-1}} : \frac{8 a^{2n+1} b^{n-2}}{9 a^{n-2}}$

i) $\frac{(4a)^3 a^{1-2n} b^{3n}}{9 a^{n-1}} : \frac{-4^2 a^{2n} b^{4+7n}}{3 a b^{4n-1}}$

j) $\frac{8^{-2} a^{3n+6} b^{n-4}}{(2a)^4 b^{n+3}} : \frac{4^{-2} a^{2-2n} b^{2n+1}}{32 a^{4n} b^{2n-3}}$

Aufgabe 8.15

Bezeichnen Sie alle richtigen Umformungen.

a) $\dfrac{4}{a^4}$

1) ☐ $4a^{-4}$
2) ☐ $\left(\dfrac{a^2}{2}\right)^{-2}$
3) ☐ $\left(4a^4\right)^{-1}$
4) ☐ $\dfrac{a^{-4}}{4}$
5) ☐ $\left(-2a^{-2}\right)^2$

b) $\left(-4a^{-2}\right)^2$

1) ☐ $16a^{-4}$
2) ☐ $\dfrac{16}{a^4}$
3) ☐ $4a^{-4}$
4) ☐ $(4a)^{-4}$
5) ☐ $\left(\dfrac{1}{2}a\right)^{-4}$

c) $\left(\dfrac{a^2}{(-a)^3}\right)^{-2}$

1) ☐ $(-a)^2$
2) ☐ $(-a)^{-2}$
3) ☐ $-a^2$
4) ☐ $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-2}$
5) ☐ a^2

d) $-a^5$

1) ☐ $(-a)^5$
2) ☐ $\left(-\dfrac{1}{a}\right)^{-5}$
3) ☐ $-\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-5}$
4) ☐ $(-a)^3 \bullet a^2$
5) ☐ $-a^6 \bullet \left(\dfrac{1}{a}\right)$

e) $\dfrac{a^3}{3}$

1) ☐ $\dfrac{3}{a^{-3}}$
2) ☐ $\left(\dfrac{3}{a^3}\right)^{-1}$
3) ☐ $\dfrac{1}{3a^{-3}}$
4) ☐ $\left(\dfrac{-3}{a^3}\right)^{-1}$
5) ☐ $\left(\dfrac{-3}{(-a)^3}\right)^{-1}$

f) $\left(\dfrac{-a}{2}\right)^4$

1) ☐ $\dfrac{-a^4}{16}$
2) ☐ $2^{-4}\,a^4$
3) ☐ $\left(\dfrac{a^2}{4}\right)^2$
4) ☐ $\left(\dfrac{-a^2}{4}\right)^2$
5) ☐ $\left(16a^{-4}\right)^{-1}$

Aufgabe 10.8

Bestimmen Sie folgende Logarithmen.

a) $\log_a a$
b) $\log_a a^2$
c) $\log_a a^5$
d) $\log_a \frac{1}{a}$
e) $\log_a \frac{1}{a^2}$
f) $\log_a \sqrt{a}$

g) $\log_a \sqrt[3]{a}$
h) $\log_a \sqrt[3]{a^2}$
i) $\log_a \sqrt[3]{a^{27}}$
j) $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$
k) $\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$
l) $\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

m) $\log_a \frac{a}{\sqrt{a}}$
n) $\log_a \frac{a^2}{\sqrt{a}}$
o) $\log_a \frac{\sqrt{a}}{a}$
p) $\log_a \frac{\sqrt{a}}{a^3}$
q) $\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{a^2}$
r) $\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$

Aufgabe 10.9

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $\log_4 16 = x$
b) $\log_5 125 = x$
c) $\log_6 7'776 = x$

d) $\log_3 1 = x$
e) $\log_6 36 = 2x$
f) $\log_3 81 = 2x$

g) $\log_3 729 = 6x$
h) $\log_4 1'024 = 3x$
i) $\log_{10} 100'000 = 10x$

j) $\log_5 25^{-1} = x$
k) $\log_2 16^{-2} = 5x$
l) $\log_3 9^{-5} = 4x$

m) $\log_7 \frac{1}{49} = x$
n) $\log_5 \frac{1}{625} = x$
o) $\log_3 \frac{1}{3} = 2x$

p) $\log_{10} \frac{1}{10} = 2x$
q) $3 \bullet \log_{1.5} 2.25 = 3x$
r) $\log_a \frac{1}{\sqrt{a^3}} = x$

s) $\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = x$
t) $\log_a \frac{a^4}{\sqrt{a^5}} = x$
u) $3^{\log_3 \frac{1}{9}} = x$

Aufgabe 10.10

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{R}$ (auf 3 signifikante Dezimalstellen genau).

a) $5^x = 25$
b) $3^x = 81$
c) $2^x = 32$
d) $4^x = 256$

e) $3^{2x} = 729$
f) $2^{10x} = 1'024$
g) $3^{2x} = 243$
h) $4^{2x} = 32$

i) $11^x = \frac{1}{11}$
j) $7^{2x} = 343$
k) $3^x = 40$
l) $2^x = 22$

m) $8^{5x} = 32$
n) $16^{4x} = 20$
o) $3^x = \frac{1}{9}$
p) $4^x = \frac{1}{64}$

q) $2^x = \frac{1}{64}$
r) $2^{\frac{x}{3}} = 512$
s) $3^{\frac{x}{4}} = 729$
t) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$