12.4 Berechnung und Darstellung betriebswirtschaftlicher Funktionen

12.4.1 Kostenfunktion

a) Vorgaben und Fragestellung

- Die Materialkosten für die Herstellung eines Stücks belaufen sich auf CHF 1.--.
- Die anteilmässigen Fixkosten für die Räumlichkeiten, die Maschinen etc. belaufen sich auf CHF 2.--.
- Ermitteln Sie die Gleichung der Kostenfunktion, und stellen Sie diese grafisch dar.

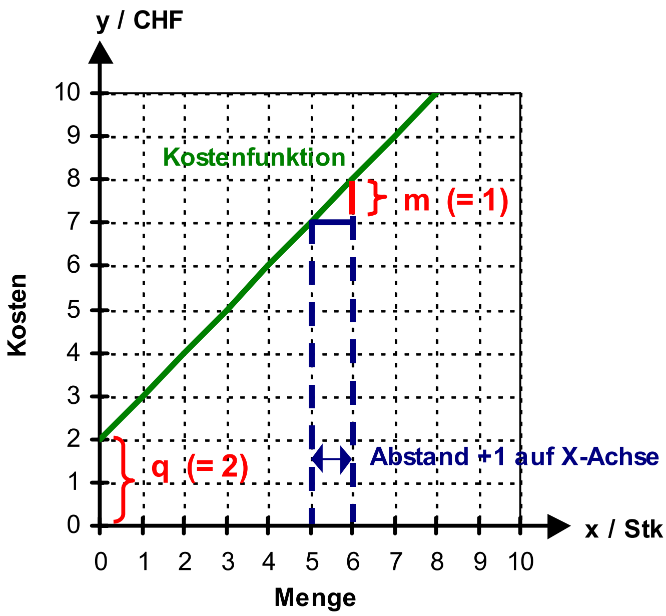
Definitionen

- x: Menge in Stück
- y: Gesamtkosten in CHF

Funktionsgleichung

Kostenfunktion: **y = 1x + 2**

Grafische Darstellung der Funktion



Interpretation

Funktionsgleichung: y = mx + q

m	sind die **Kosten** pro Mengeneinheit
x	sind die **Stückzahlen**
mx	sind die **variablen** Kosten
q	sind die **fixen** Kosten
y	sind die **Gesamtkosten**

b) Vorgaben und Fragestellung

- Die Gesamtkosten eines Produktionsunternehmens entwickeln sich nach dem Gesetz $y = mx + q$, wobei x die Anzahl Stück und y die Gesamtkosten bedeuten.
  Wenn 5 Stück hergestellt werden, belaufen sich die Gesamtkosten auf CHF 25.--, bei 7 Stück auf CHF 33.--.
- Ermitteln Sie die Gleichung der Kostenfunktion, und stellen Sie diese grafisch dar.

Definitionen

Funktionsgleichung

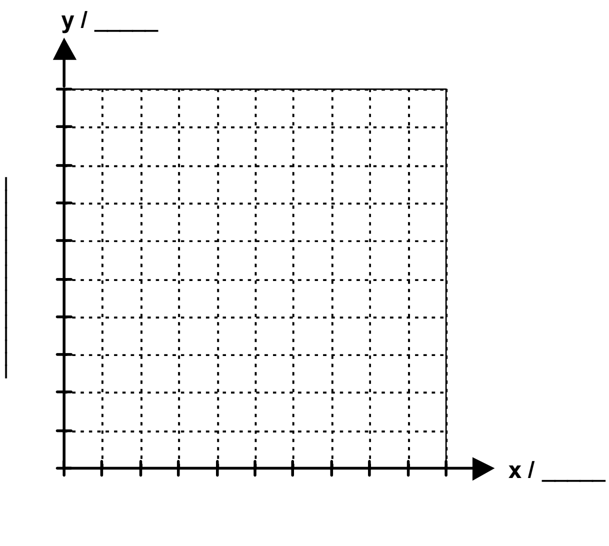
❶ **Basisdaten (Stück und Kosten) in Normalform einsetzen ($y = mx + q$)**

❷ **Mit Gleichsetzungsverfahren (q gleichsetzen) die Steigung m ausrechnen**

❸ **m in eine der beiden Normalformen einsetzen und q ausrechnen**

❹ **m und q zur Funktionsgleichung zusammensetzen**

Grafische Darstellung der Funktion



b) $y = x^2 - 2x - 8$

I) Berechnung der Nullstellen

❶ **Für y den Wert 0 einsetzen**

$x^2 - 2x - 8 = 0$

❷ **x berechnen**

Variante 1: Faktorzerlegung

$(x + 2)(x - 4) = 0$

$\Rightarrow$ beide Faktoren können je 0 sein

$x_1 = \underline{-2}, \quad x_2 = \underline{4}$

Variante 2: x mit Formeln berechnen (pq-Formel)

$$x_{1,2} = -\left(\frac{-2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-8)}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 1 \pm 3$$

$x_1 = \underline{-2}, \quad x_2 = \underline{4}$

❸ **Nullstellen**

$N_1\ (-2 / 0), \quad N_2\ (4 / 0)$

II) Berechnung des Scheitelpunkts

Über die Nullstellen:

❶ **Nullstellen bestimmen (vgl. Punkt I)**

$N_1\ (-2 / 0), \quad N_2\ (4 / 0)$

❷ **X-Koordinate des Scheitelpunkts berechnen: $(x_1 + x_2)\ /\ 2$**

$(-2 + 4)\ /\ 2 = \underline{1}$

❸ **Y-Koordinate des Scheitelpunkts berechnen: x einsetzen**

$y = 1^2 - 2 \bullet 1 - 8 \quad \Rightarrow \quad y = \underline{-9}$

❹ **Scheitelpunkt**

$S\ (1 / -9)$

Mit Hilfe von Formeln:

❶ ❷ **Werte der Normalform in Formel einsetzen**

$y = x^2 - 2x - 8$

➔ $p = -2, \ q = -8$

$$S\left(\frac{-(-2)}{2}\ /\ (-8) - \frac{(-2)^2}{4}\right)$$

❸ ❹ **Scheitelpunkt berechnen**

$$S\left(\frac{2}{2}\ /\ (-8) - \frac{4}{4}\right)$$

$S\ (1 / -9)$

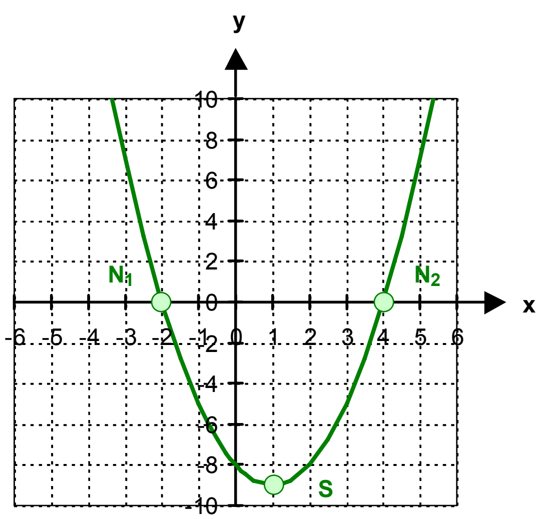
III) Diagramm

❷ **Wertetabelle für weitere Punkte**

x	y
0	-8
0.5	-8.75
1.5	-8.75
2	-8
3	-5
5	7
-1	-5
-1.5	-2.75
-3	7
-5	27

❶ **Nullstellen/Scheitelpunkt eintragen**

❸ **Grafik**



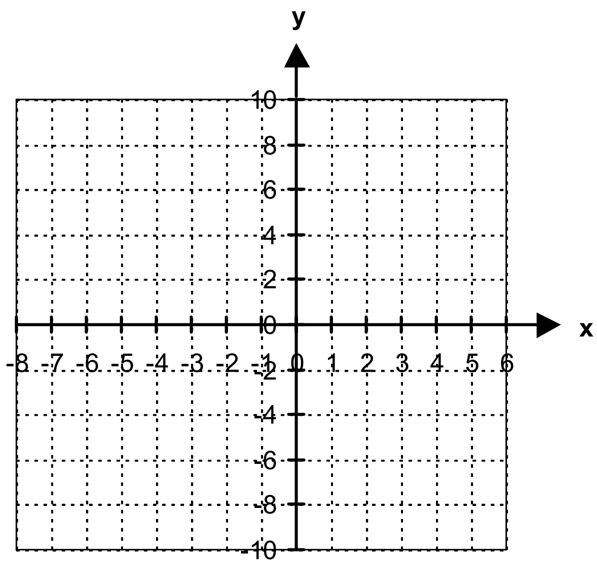
c) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

I) Berechnung der Nullstellen

II) Berechnung des Scheitelpunkts

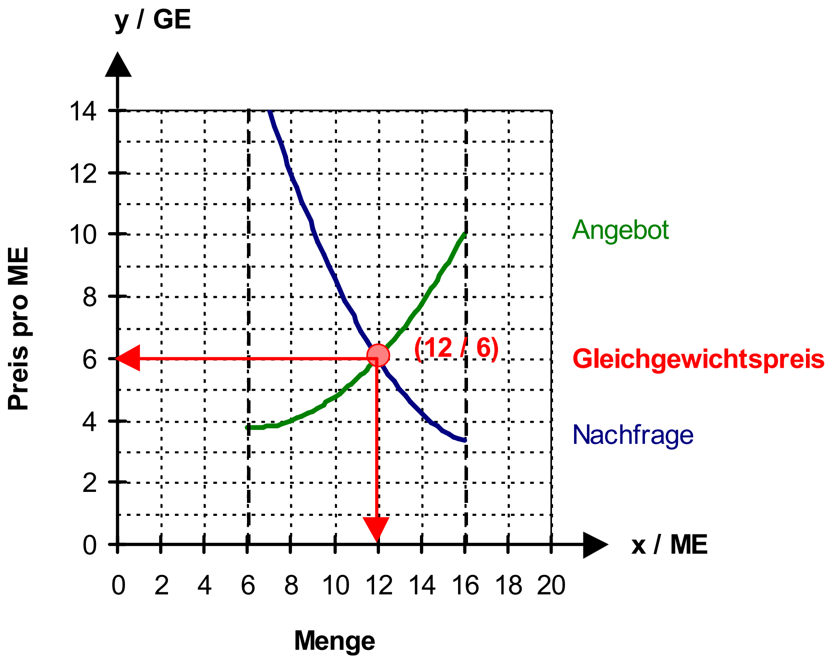
III) Diagramm

x	y



15.3.3 Der Gleichgewichtspreis

a3) Lesen Sie den Gleichgewichtspreis aus dem Diagramm ab, der sich aus den beiden vorhergehenden Angebots- und Nachfragefunktionen ergibt.



Der Gleichgewichtspreis beträgt **6 Geldeinheiten** bei einer Menge von 12 Mengeneinheiten.

a4) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis rechnerisch.

Angebots- und Nachfragefunktion einander **gleichsetzen**:

$$\frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + 6 = \frac{5}{48}x^2 - \frac{43}{12}x + 34 \qquad | \bullet 48$$

$$3x^2 - 36x + 288 = 5x^2 - 172x + 1'632 \qquad | -3x^2, +36x, -288$$

$$2x^2 - 136x + 1'344 = 0 \qquad | : 2$$

$$x^2 - 68x + 672 = 0 \qquad p = -68,\ q = 672$$

$$x_{1,2} = -\left(\frac{-68}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-68}{2}\right)^2 - 672}$$

$$x_{1,2} = 34 \pm \sqrt{1'156 - 672}$$

$$x_{1,2} = 34 \pm \sqrt{484}$$

$$x_{1,2} = 34 \pm 22$$

$x_1 = \underline{12}$, $x_2 = \underline{56}$ (x_2 fällt als Lösung weg, da nicht in Definitionsmenge enthalten)

y berechnen (den Wert von x_1 in einer der beiden Funktionen einsetzen, hier: Angebotsfunktion):

$$y = \frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + 6 \Rightarrow y = \frac{1}{16} \bullet 12^2 - \frac{3}{4} \bullet 12 + 6 \Rightarrow y = 9 - 9 + 6 \Rightarrow y = \underline{6}$$

Der Gleichgewichtspreis beträgt **6 Geldeinheiten** bei einer Menge von 12 Mengeneinheiten.

15.3.4 Anwendungsbeispiele

a) Das Marktverhalten lässt sich im Bereich zwischen 6 und 14 Mengeneinheiten mit folgenden Funktionen beschreiben:

Angebot: $y = \frac{7}{90}x^2 - \frac{47}{90}x + 2\frac{4}{9}$ Nachfrage: $y = \frac{1}{25}x^2 - \frac{8}{5}x + 17$

- Zeichnen Sie die Funktionen auf.
- Wie hoch ist der Gleichgewichtspreis? Lesen Sie ihn aus der Grafik ab.

❶ **Definitionen**

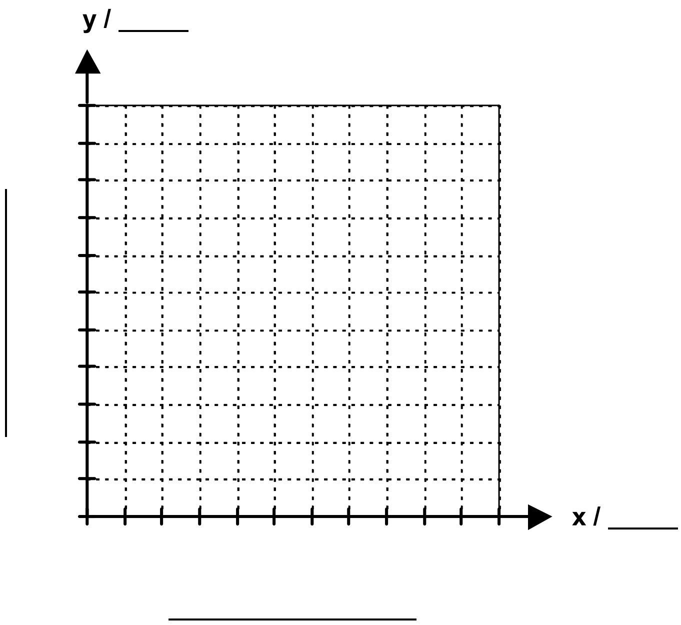
❷ **Grafische Darstellung**

Wertetabelle für die Angebotsfunktion:

x										
y										

Wertetabelle für die Nachfragefunktion:

x										
y										



❸ **Gleichgewichtspreis**

17.3.2 Verhältnismässige Abhängigkeit

2) Eine Tankstelle hat für den Einkauf von bleifreiem und Super plus Benzin folgende Auflagen erhalten: Vom bleifreien Benzin müssen mindestens 40, aber maximal 60 Tonnen eingekauft werden. Vom Super plus Benzin sollen mindestens 15 Tonnen, aber maximal 30 Tonnen gekauft werden.
Zusätzlich muss beachtet werden, dass die Menge bleifreies Benzin zu der Menge des Super plus Benzins höchstens im Verhältnis von 5 **:** 2 stehen darf. (Werden beispielsweise 20 Tonnen Super plus gekauft, können höchstens 50 Tonnen bleifreies Benzin gekauft werden.)
Die Kosten je Tonne bleifreiem Benzin betragen CHF 1'100.--, je Tonne Super plus Benzin CHF 1'200.--.

Bestimmen Sie die Bedingungen und die Zielfunktion, und stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar.
Bei welchen Mengen sind die Kosten am kleinsten und wie hoch sind sie?

a) Definitionen

D = $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$

x = Anzahl Tonnen bleifreies Benzin

y = Anzahl Tonnen Super plus Benzin

b) Bedingungen

1)	$x \geq 40$	$\Rightarrow x = 40$	und $\geq$
2)	$x \leq 60$	$\Rightarrow x = 60$	und $\leq$
3)	$y \geq 15$	$\Rightarrow y = 15$	und $\geq$
4)	$y \leq 30$	$\Rightarrow y = 30$	und $\leq$

Bedingung: Zusätzlich muss beachtet werden, dass die Menge bleifreies Benzin zu der Menge des Super plus Benzins höchstens im Verhältnis von 5 **:** 2 stehen darf.

Bleifrei **:** Super plus $\leq$ 5 **:** 2

$\frac{x}{y} \leq \frac{5}{2} \quad | \bullet 2y$

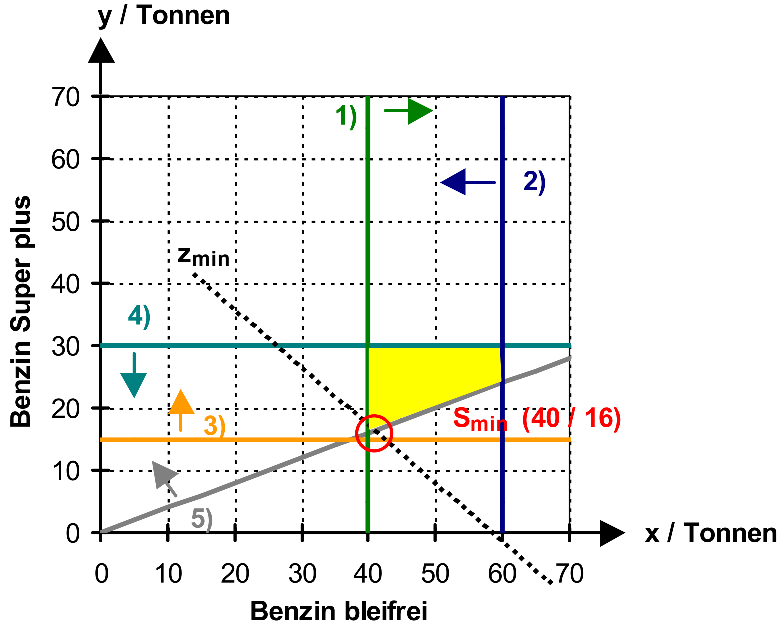
$2x \leq 5y$

5)	$2x \leq 5y$	$\Rightarrow y = \frac{2}{5}x$	und $\geq$

c) Zielfunktion

$z = 1'100x + 1'200y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{11}{12}x$

d) Diagramm



e) Bestimmen des Minimums

Berechnen des Minimums als Schnittpunkt von Gerade 1) und 5)

x = 40 und $y = \frac{2}{5}x$

<u>Einsetzungsverfahren</u> (x in Gleichung 5) einsetzen)

$y = \frac{2}{5}x$

$y = \frac{2}{5} \bullet 40$

<u>y = 16</u> <u>x = 40</u> (ergibt sich aus Gleichung 1) direkt)

S_{min} (40 / 16)

f) Stückzahlen für minimale Kosten

Minimale Kosten entstehen bei **40 Tonnen bleifreiem** und **16 Tonnen Super plus Benzin**.

g) Minimale Kosten

Zielfunktion: z = 1'100x + 1'200y

Minimale Kosten = 1'100 • 40 + 1'200 • 16 = 63'200

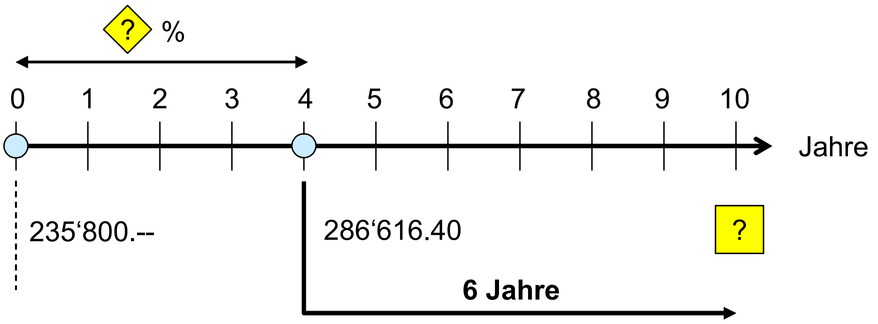
Die minimalen Kosten betragen **CHF 63'200.--**.

18.10 Anwendungsbeispiele IV: Formel-Kombinationen

Viele Fragestellungen in Bezug auf Zinseszinsen lassen sich nur in zwei oder mehreren Teilschritten lösen.

a) Ein Kapital von CHF 235'800.-- ist nach 4 Jahren auf CHF 286'616.40 angewachsen. Welcher Betrag steht dem Kontoinhaber bei gleich bleibender Verzinsung 10 Jahre nach der Investition zur Verfügung?

❶ **Analyse**



❷ **Formeln festlegen**

Berechnung des Zinssatzes: $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$

Berechnung des Endkapitals: $K_n = K_0 \bullet q^n$

❸ **Ausrechnung**

Teilschritt 1:
Berechnung des **Zinssatzes**:

$$q = \sqrt[4]{\frac{286'616.40}{235'800}} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[4]{1.2155063\ldots} \quad \Rightarrow \quad q = 1.0500\ldots$$

$$p = (q-1) \bullet 100 \quad \Rightarrow \quad p = (1.0500\ldots - 1) \bullet 100 \quad \Rightarrow \quad p = \underline{5\ \%}$$

Teilschritt 2:
Berechnung des **Endkapitals**:

$$K_n = 286'616.40 \bullet 1.05^6 \quad \Rightarrow \quad K_n = 286'616.40 \bullet 1.3400956\ldots$$

$$K_n = \underline{384'093.3881\ldots}$$

❹ **Lösung**

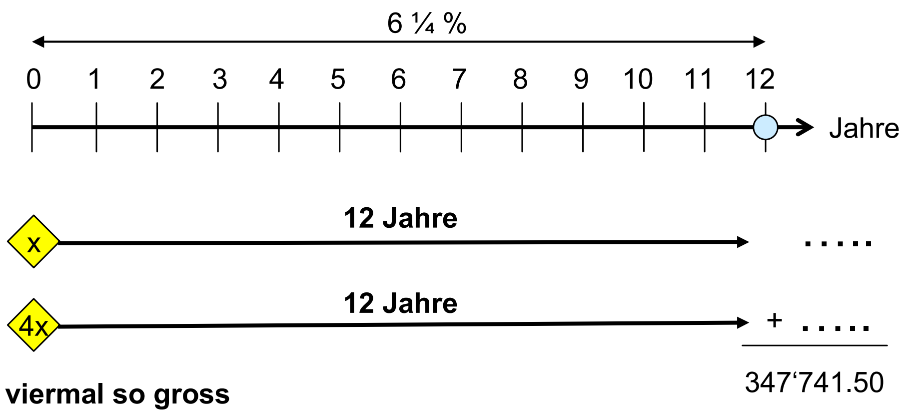
Nach 10 Jahren ist das Kapital bei einem Zinssatz von **5 %** auf **CHF 384'093.40** angewachsen.

18.11 Anwendungsbeispiele V: Gleichungen

Komplexe Aufgabenstellungen lassen sich nur mit Hilfe von Gleichungen lösen.

a) Zwei Vermögen, von denen das eine viermal so gross ist wie das andere, sind nach 12 Jahren zusammen auf CHF 347'741.50 angewachsen.
Wie hoch waren die beiden ursprünglichen Kapitalien, wenn der Zinssatz für beide Kapitalien durchgehend 6 ¼ % betragen hat?

❶ **Analyse**



❷ **Variable und Formel festlegen**

x: Anfangskapital des kleineren Vermögens

$K_n = K_0 \bullet q^n$

❸ **Ausrechnung**

$x \bullet 1.0625^{12} + 4x \bullet 1.0625^{12} = 347'741.50$	| ausklammern
$1.0625^{12} \bullet (x + 4x) = 347'741.50$	| ausrechnen
$2.06988999\ldots \bullet 5x = 347'741.50$	| ausrechnen
$x \bullet 10.34944\ldots = 347'741.50$	| : 10.34944...
$\underline{x = 33'599.9982\ldots}$	

Kapital 1: 33'600.--

Kapital 2: 134'400.-- (= 33'600 • 4)

❹ **Lösung**

Das eine Kapital betrug **CHF 33'600.--**, das andere **CHF 134'400.--**.