5.6 Additionsverfahren

Prinzip: Die beiden Gleichungen werden so umgeformt, dass bei der **Addition** der beiden Gleichungen eine Variable wegfällt.
→ Es müssen nach der Umformung also in beiden Gleichungen *gleich viele x oder gleich viele y (aber mit entgegengesetzten Vorzeichen)* vorhanden sein.

Beispiele ($G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$)

a) (1) $3x + y = 18$
(2) $2x - 3y = 1$

Es spielt für das Lösen und das Ergebnis keine Rolle, welche Variable zuerst wegfällt, wie aus der folgenden Musterlösung ersichtlich ist.

Variante 1: x soll zuerst wegfallen

❶ **Definitionsmenge**

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Gleichung(en) umformen**

Gleichung(en) **geeignet multiplizieren**

hier: Gleichung (1) mit 2
Gleichung (2) mit (−3)

$$\begin{array}{llcl} (1) & 3x + y = 18 & | & \cdot 2 \\ (1)' & 6x + 2y = 36 & & \\ (2) & 2x - 3y = 1 & | & \cdot (-3) \\ (2)' & -6x + 9y = -3 & & \end{array}$$

❸ **Eliminieren einer der Variablen**

Die beiden Gleichungen **addieren**:

$$\begin{array}{ll} (1)' & 6x + 2y = 36 \\ (2)' & \underline{-6x + 9y = -3} \\ & 2y + 9y = 36 - 3 \end{array}$$

❹ **Verbleibende 1. Variable ausrechnen**

$11y = 33 \quad | : 11$

$\underline{y = 3}$

❺ **2. Variable ausrechnen**

Den Wert der berechneten Variable in einer der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen.
hier: y in Gleichung (1)

$3x + y = 18$ und $y = 3$

$3x + 3 = 18 \quad | - 3$
$3x = 15 \quad | : 3$

$\underline{x = 5}$

❻ **Lösungsmenge**

$L = \{(5 \mid 3)\}$

Variante 2: y soll zuerst wegfallen

❶ **Definitionsmenge**

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Gleichung(en) umformen**

Gleichung(en) **geeignet multiplizieren**

hier: Gleichung (1) mit 3
Gleichung (2) muss nicht multipliziert werden

$$\begin{array}{llcl} (1) & 3x + y = 18 & | & \cdot 3 \\ (1)' & 9x + 3y = 54 & & \end{array}$$

❸ **Eliminieren einer der Variablen**

Die beiden Gleichungen **addieren**:

$$\begin{array}{ll} (1)' & 9x + 3y = 54 \\ (2) & \underline{2x - 3y = 1} \\ & 9x + 2x = 54 + 1 \end{array}$$

❹ **Verbleibende 1. Variable ausrechnen**

$11x = 55 \quad | : 11$

$\underline{x = 5}$

❺ **2. Variable ausrechnen**

Den Wert der berechneten Variable in einer der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen.
hier: x in Gleichung (1)

$3x + y = 18$ und $x = 5$

$3 \cdot 5 + y = 18$
$15 + y = 18 \quad | - 15$

$\underline{y = 3}$

❻ **Lösungsmenge**

$L = \{(5 \mid 3)\}$

c) (1) $4x + 3y = 7$
(2) $7x + 6y = 10$

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❶ **Definitionsmenge**
$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Gleichung(en) umformen / geeignet multiplizieren**
(1) $4x + 3y = 7$ | $\bullet (-2)$ → (1)' $-8x - 6y = -14$
(2) $7x + 6y = 10$

❸ **Eliminieren einer der Variablen**
(1)' $-8x - 6y = -14$
(2) $\underline{7x + 6y = 10}$
$-x = -4$ | $\bullet (-1)$

❹ **Übrig gebliebene 1. Variable ausrechnen**
$\underline{x = 4}$

❺ **2. Variable ausrechnen** (hier: x in Gleichung (1) einsetzen)
$4 \bullet 4 + 3y = 7$ | $- 16$
$3y = -9$ | $: 3$
$\underline{y = -3}$

❻ **Lösungsmenge**
$L = \{(4 \mid -3)\}$

$L = \{(4 \mid -3)\}$

d) (1) $5x - 8y = -6$
(2) $2x + 6y = -7$

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❶ **Definitionsmenge**
$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Gleichung(en) umformen / geeignet multiplizieren**
(1) $5x - 8y = -6$ | $\bullet 2$ → (1)' $10x - 16y = -12$
(2) $2x + 6y = -7$ | $\bullet (-5)$ → (2)' $-10x - 30y = 35$

❸ **Eliminieren einer der Variablen**
(1)' $10x - 16y = -12$
(2)' $\underline{-10x - 30y = 35}$
$-46y = 23$ | $: (-46)$

❹ **Übrig gebliebene 1. Variable ausrechnen**
$\underline{y = -½}$

❺ **2. Variable ausrechnen** (hier: y in Gleichung (2) einsetzen)
$2x + 6 \bullet (-½) = -7$
$2x - 3 = -7$ | $+ 3$
$2x = -4$ | $: 2$
$\underline{x = -2}$

❻ **Lösungsmenge**
$L = \{(-2 \mid -½)\}$

$L = \left\{\left(-2 \mid -\frac{1}{2}\right)\right\}$

6.4.3 pq-Formel

Neben den beiden mathematischen Methoden der Faktorzerlegung und der quadratischen Ergänzung gibt es auch Lösungsmethoden, die auf Formeln basieren: die pq- und die abc-Formel der quadratischen Gleichungen.

Haben wir eine quadratische Gleichung, bei der vor dem x^2 der Faktor 1 steht, lässt sich die pq-Formel anwenden.

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Die mathematische Herleitung der pq-Formel können Sie im Kapitel 6.4.4 nachvollziehen.

Allgemeines Lösungsvorgehen:

❶ Definitionsmenge bestimmen

❷ Gleichung in die pq-Normalform bringen (wenn nötig), und die Werte für p und q bestimmen
! Achtung: Die Vorzeichen von p und q auch übernehmen.

❸ Werte für p und q in der Formel einsetzen *(inkl. Vorzeichen !)*

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen

❺ Lösungsmenge bestimmen

Beispiele $(G = \mathbb{R})$

a) $x^2 + 4x - 221 = 0$

❶ $D = \mathbb{R}$

❷ Wir bestimmen zuerst p und q.
(falls der Faktor vor $x^2 \neq 1$ ist, muss die Gleichung noch durch diesen dividiert werden)

$$x^2 \underbrace{+\ 4}_{p}x \underbrace{-\ 221}_{q} = 0$$

Die **Vorzeichen** gehören zu p und q dazu !

❸ Die Werte für p und q in der Formel einsetzen: **p = 4**, **q = −221**

$$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-221)}$$

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 221}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{225}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 15$$

$\Rightarrow x_1 = -2 - 15 \quad \Rightarrow x_1 = \underline{-17}$

$\Rightarrow x_2 = -2 + 15 \quad \Rightarrow x_2 = \underline{13}$

❺ $L = \{ -17 ; 13 \}$

b) $2x^2 - 6x = -2$

❶ $D = \mathbb{R}$

❷ Gleichung in die pq-Normalform bringen:

$2x^2 - 6x = -2 \quad | + 2$

$2x^2 - 6x + 2 = 0 \quad | : 2$ (d.h. durch den Faktor vor x^2 dividieren)

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x^2 \underbrace{-\ 3}_{p}x \underbrace{+\ 1}_{q} = 0$$

❸ Die Werte für p und q in der Formel einsetzen: **$p = -3$**, **$q = 1$**

$$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 1}$$

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen:

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{2.25 - 1}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{1.25}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm 1.1180...$

$\Rightarrow x_1 = 1.5 - 1.1180... \quad \Rightarrow x_1 = \underline{0.3819...}$

$\Rightarrow x_2 = 1.5 + 1.1180... \quad \Rightarrow x_2 = \underline{2.6180...}$

❺ $L = \{ 0.38 ; 2.62 \}$

c) $x^2 - 3x = 54$

$D = \mathbb{R}$

❶ $D = \mathbb{R}$

❷ $x^2 - 3x = 54$

$x^2 - 3x - 54 = 0$

$$x^2 \underbrace{-\ 3}_{p}x \underbrace{-\ 54}_{q} = 0$$

❸ $$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - (-54)}$$

❹ $x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{2.25 + 54}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{56.25}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm 7.5$

$\Rightarrow x_1 = \underline{-6}, \quad x_2 = \underline{9}$

❺ $L = \{ -6 ; 9 \}$

$L = \{ -6 ; 9 \}$

Aufgabe 6.5

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{R}$ mit Hilfe der abc-Formel.

a)	$5x^2 + 10x - 75 = 0$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-5;\ 3\}$
b)	$3x^2 - 2x = 8$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-\frac{4}{3};\ 2\right\}$
c)	$5x^2 + x - 48 = 0$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-3.2;\ 3\}$
d)	$2x^2 - 12x - 20 = 0$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-1.36;\ 7.36\}$
e)	$3x^2 = 5x + 2$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-\frac{1}{3};\ 2\right\}$
f)	$6x^2 + 10 = 19x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{\frac{2}{3};\ 2.5\right\}$
g)	$4x^2 - 10x = 14$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-1;\ 3.5\}$
h)	$8x^2 - 3x = 0.5$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-\frac{1}{8};\ \frac{1}{2}\right\}$
i)	$3x^2 - 25x = -28$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{\frac{4}{3};\ 7\right\}$
j)	$5x^2 + 4x = 17.25$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-2.3;\ 1.5\}$
k)	$(4x - 1)(2x + 2) = 0$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-1;\ \frac{1}{4}\right\}$
l)	$(3x - 2)(5x + 2) = 5x^2$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-0.46;\ 0.86\}$

b) Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 138. Teilt man die grössere durch die kleinere, erhält man 4, und es bleibt ein Rest von 3.
Wie heissen die beiden Zahlen?

❶ Analyse

	grössere Zahl		**kleinere Zahl**		**Resultat**
1)	△	+	□	=	138
2)	△	:	□	=	4, Rest 3

Tipp: Subtrahiert man den Rest von der grösseren Zahl, so ergibt die Division keinen Rest mehr, sondern genau 4.

oder	△ **– 3**	:	□	=	4

Lösung mit nur 1 Unbekannten

❷ ([grössere Zahl] – Rest) **:** [kleinere Zahl] = **4**

❸ x = grössere Zahl
138 – x = kleinere Zahl

❹ $\frac{x-3}{138-x} = 4$

❺ D = ℕ \ { 138 }

$\frac{x-3}{138-x} = 4 \quad | \cdot (138-x)$

$x - 3 = 4(138 - x) \quad |$ ausmultiplizieren

$x - 3 = 552 - 4x \quad | + 4x$

$5x - 3 = 552 \quad | + 3$

$5x = 555 \quad | : 5$

$\underline{x = 111}$

kleinere Zahl: $138 - x$
$138 - 111 = \underline{27}$

Lösung mit 2 Unbekannten

❷ (1) [grössere Zahl] + [kleinere Zahl] = **138**
(2) ([grössere Zahl] – Rest) **:** [kleinere Zahl] = **4**

❸ x = grössere Zahl
y = kleinere Zahl

❹ (1) $x + y = 138$
(2) $\frac{x-3}{y} = 4$

❺ D = ℕ x ℕ

(1) $x + y = 138 \quad \rightarrow \quad x = 138 - y$

(2) $\frac{x-3}{y} = 4 \quad \rightarrow \quad x = 4y + 3$

<u>Gleichsetzungsverfahren</u>

$138 - y = 4y + 3 \quad | + y$
$138 = 5y + 3 \quad | - 3$
$135 = 5y \quad | : 5$
$\underline{y = 27}$

<u>y einsetzen und x berechnen</u>

$x = 138 - y$
$x = 138 - 27$
$\underline{x = 111}$

❻ Die Zahlen lauten: **111** und **27**.

❼ Probe: 111 + 27 = 138 ☑
111 : 27 = 4, Rest 3 ☑

c) Zähler und Nenner eines Bruches ergeben zusammen 21. Zählt man zum Zähler und Nenner je die Zahl 7 dazu, erhält der Bruch den Wert $\frac{3}{4}$.

Wie heisst der Bruch?

❶ Analyse

(1) Zähler + Nenner = 21

(2) $\dfrac{\text{Zähler} + 7}{\text{Nenner} + 7} = \dfrac{3}{4}$

❷ (1) [Zähler] + [Nenner] = 21

(2) ([Zähler] + 7) : ([Nenner] + 7) = $\frac{3}{4}$

Lösung mit nur 1 Unbekannten

❸ x = Zähler
21 − x = Nenner

❹ $\dfrac{x+7}{(21-x)+7} = \dfrac{3}{4}$

❺ $D = \mathbb{Q} \setminus \{28\}$

$\dfrac{x+7}{28-x} = \dfrac{3}{4}$ | • 4 (28 − x)

$4(x+7) = 3(28-x)$

$4x + 28 = 84 - 3x$ | + 3x

$7x + 28 = 84$ | − 28

$7x = 56$ | : 7

$\underline{x = 8}$

Nenner: $21 - x$
$21 - 8 = \underline{13}$

Lösung mit 2 Unbekannten

❸ x = Zähler
y = Nenner

❹ (1) $x + y = 21$

(2) $\dfrac{x+7}{y+7} = \dfrac{3}{4}$

❺ $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{-7\}$

(1) $x + y = 21$ | − y

$x = -y + 21$ | • 4

$4x = -4y + 84$

(2) $\dfrac{x+7}{y+7} = \dfrac{3}{4}$ | • 4 (y + 7)

$4(x+7) = 3(y+7)$

$4x + 28 = 3y + 21$ | − 28

$4x = 3y - 7$

Gleichsetzungsverfahren

$-4y + 84 = 3y - 7$ | + 4y

$84 = 7y - 7$ | + 7

$91 = 7y$ | : 7

$\underline{y = 13}$

y in Gleichung (1) einsetzen:

$x + y = 21$

$x + 13 = 21$

$\underline{x = 8}$

❻ Der Bruch lautet $\frac{8}{13}$.

8.5 Rechenregeln für Potenzen mit gleicher Basis

8.5.1 Addition / Subtraktion

a) $a^2 + a^3 \quad = \quad a^2 + a^3$ (nicht addierbar)

➔ Potenzen mit unterschiedlichen Exponenten können **nicht** addiert werden. Das leuchtet ein, wenn wir a mit m ersetzen und uns bewusst werden, dass m^2 ein **Flächen-** und m^3 ein **Volumenmass** ist.

b) $a^3 + a^3 \quad = \quad 2a^3$

c) $2ab^2 - ab^2 \quad = \quad ab^2$

d) $5a^2 + a - (4a^2 - a) \quad = \quad a^2 + 2a$

Fazit: Nur Potenzen **mit gleicher Basis und gleichem Exponent** können addiert/subtrahiert werden.

8.5.2 Multiplikation

a) $a^2 \bullet a^3 \quad = \quad a^{(2+3)} \quad = \quad a^5$

weil $\boxed{a \bullet a} \bullet \boxed{a \bullet a \bullet a}$

b) $2a^2 \bullet 5a^4 \quad = \quad 2 \bullet 5 \bullet a^{(2+4)} \quad = \quad 10a^6$

weil $2 \bullet 5 \bullet \boxed{a \bullet a} \bullet \boxed{a \bullet a \bullet a \bullet a}$

c) $b^7 \bullet b \quad\quad b^{(7+1)} \quad = \quad b^8$

d) $3a^5 \bullet 4a^3 \quad\quad 3 \bullet 4 \bullet a^{(5+3)} \quad = \quad 12a^8$

Fazit: Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem die Exponenten **addiert** werden.

8.5.3 Division

a) $a^4 : a^3 \quad = \quad a^{(4-3)} \quad = \quad a$

weil $\dfrac{a \bullet a \bullet a \bullet a}{a \bullet a \bullet a} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{a \bullet a \bullet a}} \bullet a}{\underset{1}{\cancel{a \bullet a \bullet a}}}$

b) $12a^4 : (6a^2) \quad = \quad 12 : 6 \bullet a^{(4-2)} \quad = \quad 2a^2$

weil $\dfrac{12 \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a}{6 \bullet a \bullet a} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{12}} \bullet \overset{1}{\cancel{a \bullet a}} \bullet a \bullet a}{\underset{1}{\cancel{6}} \bullet \underset{1}{\cancel{a \bullet a}}}$

c) $a^8 : a \quad\quad a^{(8-1)} \quad = \quad a^7$

d) $36a^5 : (9a^4) \quad\quad 36 : 9 \bullet a^{(5-4)} \quad = \quad 4a$

Fazit: Potenzen werden dividiert, indem die Exponenten voneinander **subtrahiert** werden.

Aufgabe 8.8

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten.

a)	$\dfrac{a^4 b^3}{a} : (a^2 b^2)$	ab
b)	$\dfrac{a^2 b^3}{c^2} : \dfrac{a^3 b^2}{c^3}$	$a^{-1} bc$
c)	$\dfrac{a^3 b^2}{b^4} : \dfrac{a^4 b}{b^3}$	a^{-1}
d)	$\dfrac{a^3 b}{b^3} : \dfrac{a^2 b^2}{a}$	$a^2 b^{-4}$
e)	$\dfrac{a^{-2} b^2}{b^{-3}} : \dfrac{a b^4}{a^4}$	ab
f)	$\dfrac{4 a^4 b^{-2}}{5 c^{-2}} : \dfrac{2 b^{-2}}{5 a^2 c^3}$	$2 a^6 c^5$
g)	$\dfrac{4 a^{-2}}{b^2 c^{-3}} : \dfrac{(2a)^2}{b^{-2} (2c)^{-3}}$	$\dfrac{1}{8} a^{-4} b^{-4}$
h)	$\dfrac{(3a)^3 b^4}{c^{-2}} : \dfrac{3a^{-1} b^3}{c^{-3}}$	$9 a^4 b c^{-1}$
i)	$\dfrac{-2^2 a^3 b^4}{b^{-2}} : \dfrac{(-4)^2 a^{-1}}{b^{-1}}$	$-\dfrac{1}{4} a^4 b^5$

Aufgabe 8.9

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten.

a)	$\dfrac{a^{n+1} b^3}{c^n} : \dfrac{a^n b^2}{c^{n+1}}$	abc
b)	$\dfrac{a^{2n-1}}{b^{2n} c^{n-1}} : \dfrac{a^{n+1}}{b^n c^{n+1}}$	$a^{n-2} b^{-n} c^2$
c)	$\dfrac{a^{1-n} b^{2n}}{a^{3n}} : \dfrac{b^{n+1}}{a^{2n-1}}$	$a^{-2n} b^{n-1}$
d)	$\dfrac{a^{2n}}{b^{2n-1} c^{1-n}} : \dfrac{a^{n-1}}{b^{2-n} c^{n-2}}$	$a^{n+1} b^{3-3n} c^{2n-3}$
e)	$\dfrac{a^2 b^{-2}}{a^3} : \dfrac{a^{-4}}{b^3}$	$a^3 b$
f)	$\dfrac{a^{1-n} b^2}{b^{n-1}} : \dfrac{b^{2n}}{a^{2n}}$	$a^{n+1} b^{3-3n}$
g)	$\dfrac{9 a^{2n} b^{n+1}}{a^{n-1}} : \dfrac{3 a^{n-2} b^{2n-1}}{b^{n+1}}$	$3 a^3 b^3$
h)	$\dfrac{4 a^{n-1} b^{2n+2}}{6 b^{n-1}} : \dfrac{8 a^{2n+1} b^{n-2}}{9 a^{n-2}}$	$\dfrac{3}{4} a^{-4} b^5$
i)	$\dfrac{(4a)^3 a^{1-2n} b^{3n}}{9 a^{n-1}} : \dfrac{-4^2 a^{2n} b^{4+7n}}{3 a b^{4n-1}}$	$-\dfrac{4}{3} a^{6-5n} b^{-5}$
j)	$\dfrac{8^{-2} a^{3n+6} b^{n-4}}{(2a)^4 b^{n+3}} : \dfrac{4^{-2} a^{2-2n} b^{2n+1}}{32 a^{4n} b^{2n-3}}$	$\dfrac{1}{2} a^{9n} b^{-11}$