Aufgabe 3.22 (Seite 64)

① Berechnen Sie die folgenden Doppelbrüche, und vereinfachen Sie so weit als möglich.
(Hierbei handelt es sich um aufwändige und anspruchsvolle Zusatzaufgaben.)

a) $$\frac{\frac{1-b}{b^2+1}}{\frac{1}{\frac{1}{2b}+\frac{b}{2}} - 1}$$

$$\frac{1}{b-1}$$

Zähler: $\underline{\frac{1-b}{b^2+1}}$

Nenner: $\frac{1}{\frac{1}{2b}+\frac{b}{2}} - 1 \rightarrow \frac{1}{\frac{1+b^2}{2b}} - 1 \rightarrow 1 \bullet \frac{2b}{1+b^2} - 1$

$\rightarrow \frac{2b}{1+b^2} - 1 \rightarrow \frac{2b-(1+b^2)}{1+b^2} \rightarrow \underline{\frac{2b-b^2-1}{1+b^2}}$

Gesamtbruch: $\frac{\frac{1-b}{b^2+1}}{\frac{2b-b^2-1}{1+b^2}} \rightarrow \frac{1-b}{b^2+1} \bullet \frac{1+b^2}{2b-b^2-1} \rightarrow \frac{(1-b)(1+b^2)}{(b^2+1)(1-b)(-1+b)}$

b) $$\frac{a}{1+\frac{a}{1+\frac{a}{1+a}}}$$

$$\frac{2a^2+a}{a^2+3a+1}$$

Zähler: $\underline{a}$

Nenner rechts: $\frac{a}{1+\frac{a}{1+a}} \rightarrow \frac{a}{\frac{1+a+a}{1+a}} \rightarrow \frac{a}{\frac{2a+1}{1+a}} \rightarrow a \bullet \frac{1+a}{2a+1} \rightarrow \underline{\frac{a+a^2}{2a+1}}$

Gesamtnenner: $1+\frac{a+a^2}{2a+1} \rightarrow \frac{2a+1\ +\ a+a^2}{2a+1} \rightarrow \underline{\frac{a^2+3a+1}{2a+1}}$

Gesamtbruch: $\frac{a}{\frac{a^2+3a+1}{2a+1}} \rightarrow a \bullet \frac{2a+1}{a^2+3a+1}$

Aufgabe 4.1 (Seite 75)

① Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

a) $3x + 4 + 2x = 34$

❹ $L = \{6\}$

❶ $D = \mathbb{Q}$

❷ $3x + 4 + 2x = 34$
$5x + 4 = 34$

❸ $5x + 4 = 34 \quad | -4$
$5x = 30 \quad | :5$
$\underline{x = 6}$

b) $19x - 15 = 15x - 35$

❹ $L = \{-5\}$

❶ $D = \mathbb{Q}$

❷ $19x - 15 = 15x - 35$

❸ $19x - 15 = 15x - 35 \quad | -15x$
$4x - 15 = -35 \quad | +15$
$4x = -20 \quad | :4$
$\underline{x = -5}$

c) $x + 8 + 3x = 10 + 3x$

❹ $L = \{2\}$

❶ $D = \mathbb{Q}$

❷ $x + 8 + 3x = 10 + 3x$
$4x + 8 = 3x + 10$

❸ $4x + 8 = 3x + 10 \quad | -3x$
$x + 8 = 10 \quad | -8$
$\underline{x = 2}$

d) $14 - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4} - 3$

❹ $L = \{12\}$

❶ $D = \mathbb{Q}$

❷ $14 - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4} - 3$

❸ $14 - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4} - 3 \quad | \cdot 12$
$168 - 8x = 9x - 36 \quad | +8x$
$168 = 17x - 36 \quad | +36$
$204 = 17x \quad | :17$
$\underline{x = 12}$

Aufgabe 5.3 (Seite 106)

① Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme in der Grundmenge ℚ x ℚ mit Hilfe des Gleichsetzungsverfahrens.

a) (1) $x + 5y = 28$
(2) $x + 3y = 20$

❻ $L = \{(8 | 4)\}$

❶ $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ (1) $x + 5y = 28$ ➔ $\underline{x = 28 - 5y}$

(2) $x + 3y = 20$ ➔ $\underline{x = 20 - 3y}$

❸ **Gleichsetzungsverfahren**

$28 - 5y = 20 - 3y$

❹ $28 - 5y = 20 - 3y$ ➔ $28 = 2y + 20$

$8 = 2y$ ➔ $\underline{y = 4}$

❺ $x = 28 - 5y$ ➔ $x = 28 - 5 \bullet 4$

$x = 28 - 20$ ➔ $\underline{x = 8}$

b) (1) $2x + y = 6$
(2) $3x + y = 10$

❻ $L = \{(4 | -2)\}$

❶ $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ (1) $2x + y = 6$ ➔ $\underline{y = 6 - 2x}$

(2) $3x + y = 10$ ➔ $\underline{y = 10 - 3x}$

❸ **Gleichsetzungsverfahren**

$6 - 2x = 10 - 3x$

❹ $6 - 2x = 10 - 3x$ ➔ $6 + x = 10$ ➔ $\underline{x = 4}$

❺ $y = 6 - 2x$ ➔ $y = 6 - 2 \bullet 4$

$y = 6 - 8$ ➔ $\underline{y = -2}$

c) (1) $2x + 3y = 18$
(2) $2x + y = 10$

❻ $L = \{(3 | 4)\}$

❶ $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ (1) $2x + 3y = 18$ ➔ $\underline{2x = 18 - 3y}$

(2) $2x + y = 10$ ➔ $\underline{2x = 10 - y}$

❸ **Gleichsetzungsverfahren**

$18 - 3y = 10 - y$

❹ $18 - 3y = 10 - y$ ➔ $18 = 2y + 10$

$8 = 2y$ ➔ $\underline{y = 4}$

❺ $2x = 10 - y$ ➔ $2x = 10 - 4$

$2x = 6$ ➔ $\underline{x = 3}$

Aufgabe 7.2 (Seite 180)

a) Die Differenz zweier Zahlen beträgt 88. Die eine Zahl ist 5 mal so gross wie die andere Zahl.
Wie heissen die beiden Zahlen?

❶ Analyse

1) Zahl1 —— **+ 88** ——→ Zahl2

2) Zahl1 —— **• 5** ——→ Zahl2

❷

[kleinere Zahl] **+ 88** = [grössere Zahl]

[kleinere Zahl] **• 5** = [grössere Zahl]

❸ x = kleinere Zahl / y = grössere Zahl

❹ (1) $x + 88 = y$
(2) $5x = y$

❺ $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$x + 88 = 5x \;\rightarrow\; 88 = 4x \;\rightarrow\; \underline{x = 22}$

$5x = y \;\rightarrow\; 5 \bullet 22 = y \;\rightarrow\; \underline{y = 110}$

Die beiden Zahlen lauten: **22 und 110**.

b) Die Summe zweier Zahlen beträgt 250. Dividiert man die grössere durch die kleinere, so erhält man 3 Rest 2.
Wie heissen die beiden Zahlen?

❶ Analyse

1) Zahl1 **+** Zahl2 **=** 250

2) Zahl1 **:** Zahl2 **=** 3, Rest 2

oder

Zahl1 **− 2** **:** Zahl2 **=** 3

❷

[Zahl 1] **+** [Zahl 2] = **250**

([Zahl 1] − **2**) **:** [Zahl 2] = **3**

❸ x = grössere Zahl / y = kleinere Zahl

❹ (1) $x + y = 250 \;\rightarrow\; x = -y + 250$

(2) $\dfrac{x-2}{y} = 3 \;\rightarrow\; x = 3y + 2$

❺ $D_x = \mathbb{Q}$, $D_y = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$-y + 250 = 3y + 2 \;\rightarrow\; 248 = 4y \;\rightarrow\; \underline{y = 62}$

$x + y = 250 \;\rightarrow\; x + 62 = 250 \;\rightarrow\; \underline{x = 188}$

Die beiden Zahlen lauten: **62 und 188**.

Aufgabe 8.9 (Seite 215)

① Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten.

a) $\dfrac{a^{n+1}\, b^3}{c^n} : \dfrac{a^n\, b^2}{c^{n+1}}$ — abc

$\dfrac{a^{n+1}\, b^3}{c^n} \bullet \dfrac{c^{n+1}}{a^n\, b^2}$ ➔ $a^{n+1-n}\, b^{3-2}\, c^{(n+1)-n}$

b) $\dfrac{a^{2n-1}}{b^{2n}\, c^{n-1}} : \dfrac{a^{n+1}}{b^n\, c^{n+1}}$ — $a^{n-2}\, b^{-n}\, c^2$

$\dfrac{a^{2n-1}}{b^{2n}\, c^{n-1}} \bullet \dfrac{b^n\, c^{n+1}}{a^{n+1}}$ ➔ $a^{(2n-1)-(n+1)}\, b^{n-2n}\, c^{(n+1)-(n-1)}$ ➔ $a^{2n-1-n-1}\, b^{n-2n}\, c^{n+1-n+1}$

c) $\dfrac{a^{1-n}\, b^{2n}}{a^{3n}} : \dfrac{b^{n+1}}{a^{2n-1}}$ — $a^{-2n}\, b^{n-1}$

$\dfrac{a^{1-n}\, b^{2n}}{a^{3n}} \bullet \dfrac{a^{2n-1}}{b^{n+1}}$ ➔ $a^{(1-n)+(2n-1)-3n}\, b^{2n-(n+1)}$ ➔ $a^{1-n+2n-1-3n}\, b^{2n-n-1}$

d) $\dfrac{a^{2n}}{b^{2n-1}\, c^{1-n}} : \dfrac{a^{n-1}}{b^{2-n}\, c^{n-2}}$ — $a^{n+1}\, b^{3-3n}\, c^{2n-3}$

$\dfrac{a^{2n}}{b^{2n-1}\, c^{1-n}} \bullet \dfrac{b^{2-n}\, c^{n-2}}{a^{n-1}}$ ➔ $a^{2n-(n-1)}\, b^{(2-n)-(2n-1)}\, c^{(n-2)-(1-n)}$

➔ $a^{2n-n+1}\, b^{2-n-2n+1}\, c^{n-2-1+n}$

e) $\dfrac{a^2\, b^{-2}}{a^3} : \dfrac{a^{-4}}{b^3}$ — $a^3\, b$

$\dfrac{a^2\, b^{-2}}{a^3} \bullet \dfrac{b^3}{a^{-4}}$ ➔ $a^{2-3-(-4)}\, b^{(-2)+3}$ ➔ $a^{2-3+4}\, b^{-2+3}$

f) $\dfrac{a^{1-n}\, b^2}{b^{n-1}} : \dfrac{b^{2n}}{a^{2n}}$ — $a^{1+n}\, b^{3-3n}$

$\dfrac{a^{1-n}\, b^2}{b^{n-1}} \bullet \dfrac{a^{2n}}{b^{2n}}$ ➔ $a^{1-n+2n}\, b^{2-(n-1)-2n}$

➔ $a^{1-n+2n}\, b^{2-n+1-2n}$