

Aufgabe 3.22 (Seite 64)

- ① Berechnen Sie die folgenden Doppelbrüche, und vereinfachen Sie so weit als möglich.
(Hierbei handelt es sich um aufwändige und anspruchsvolle Zusatzaufgaben.)

$$a) \frac{\frac{1-b}{b^2+1}}{\frac{1}{\frac{1}{2b} + \frac{b}{2}}} - 1$$

$$\frac{1}{b-1}$$

Zähler: $\frac{1-b}{b^2+1}$

Nenner: $\frac{1}{\frac{1}{2b} + \frac{b}{2}} - 1 \rightarrow \frac{1}{\frac{1+b^2}{2b}} - 1 \rightarrow 1 \cdot \frac{2b}{1+b^2} - 1$
 $\rightarrow \frac{2b}{1+b^2} - 1 \rightarrow \frac{2b-(1+b^2)}{1+b^2} \rightarrow \frac{2b-b^2-1}{1+b^2}$

Gesamtbruch: $\frac{\frac{1-b}{b^2+1}}{\frac{2b-b^2-1}{1+b^2}} \rightarrow \frac{1-b}{b^2+1} \cdot \frac{1+b^2}{2b-b^2-1} \rightarrow \frac{(1-b)(1+b^2)}{(b^2+1)(1-b)(-1+b)}$

$$b) \frac{a}{1 + \frac{a}{1 + \frac{a}{1+a}}}$$

$$\frac{2a^2+a}{a^2+3a+1}$$

Zähler: a

Nenner rechts: $\frac{a}{1 + \frac{a}{1+a}} \rightarrow \frac{a}{\frac{1+a+a}{1+a}} \rightarrow \frac{a}{\frac{2a+1}{1+a}} \rightarrow a \cdot \frac{1+a}{2a+1} \rightarrow \frac{a+a^2}{2a+1}$

Gesamtnenner: $1 + \frac{a+a^2}{2a+1} \rightarrow \frac{2a+1 + a+a^2}{2a+1} \rightarrow \frac{a^2+3a+1}{2a+1}$

Gesamtbruch: $\frac{a}{\frac{a^2+3a+1}{2a+1}} \rightarrow a \cdot \frac{2a+1}{a^2+3a+1}$

Aufgabe 4.1 (Seite 75)

① Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge \mathbb{Q} .

a) $3x + 4 + 2x = 34$

④ $L = \{ 6 \}$

❶ $D = \mathbb{Q}$
❷ $3x + 4 + 2x = 34$
 $5x + 4 = 34$
❸ $5x + 4 = 34$ | - 4
 $5x = 30$ | : 5
 $x = 6$

b) $19x - 15 = 15x - 35$

④ $L = \{ -5 \}$

❶ $D = \mathbb{Q}$
❷ $19x - 15 = 15x - 35$
❸ $19x - 15 = 15x - 35$ | - 15x
 $4x - 15 = -35$ | + 15
 $4x = -20$ | : 4
 $x = -5$

c) $x + 8 + 3x = 10 + 3x$

④ $L = \{ 2 \}$

❶ $D = \mathbb{Q}$
❷ $x + 8 + 3x = 10 + 3x$
 $4x + 8 = 3x + 10$
❸ $4x + 8 = 3x + 10$ | - 3x
 $x + 8 = 10$ | - 8
 $x = 2$

d) $14 - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4} - 3$

④ $L = \{ 12 \}$

❶ $D = \mathbb{Q}$
❷ $14 - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4} - 3$
❸ $14 - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4} - 3$ | • 12
 $168 - 8x = 9x - 36$ | + 8x
 $168 = 17x - 36$ | + 36
 $204 = 17x$ | : 17
 $x = 12$

Aufgabe 5.3 (Seite 106)

- ① Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme in der Grundmenge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit Hilfe des Gleichsetzungsverfahrens.

a) (1) $x + 5y = 28$
 (2) $x + 3y = 20$

⑥ $L = \{(8|4)\}$

① $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

② (1) $x + 5y = 28 \Rightarrow x = 28 - 5y$
 (2) $x + 3y = 20 \Rightarrow x = 20 - 3y$

③ **Gleichsetzungsverfahren**

$$28 - 5y = 20 - 3y$$

④ $28 - 5y = 20 - 3y \Rightarrow 28 = 2y + 20$
 $8 = 2y \Rightarrow y = 4$

⑤ $x = 28 - 5y \Rightarrow x = 28 - 5 \cdot 4$
 $x = 28 - 20 \Rightarrow x = 8$

b) (1) $2x + y = 6$
 (2) $3x + y = 10$

⑥ $L = \{(4|-2)\}$

① $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

② (1) $2x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - 2x$
 (2) $3x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 3x$

③ **Gleichsetzungsverfahren**

$$6 - 2x = 10 - 3x$$

④ $6 - 2x = 10 - 3x \Rightarrow 6 + x = 10 \Rightarrow x = 4$

⑤ $y = 6 - 2x \Rightarrow y = 6 - 2 \cdot 4$
 $y = 6 - 8 \Rightarrow y = -2$

c) (1) $2x + 3y = 18$
 (2) $2x + y = 10$

⑥ $L = \{(3|4)\}$

① $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

② (1) $2x + 3y = 18 \Rightarrow 2x = 18 - 3y$
 (2) $2x + y = 10 \Rightarrow 2x = 10 - y$

③ **Gleichsetzungsverfahren**

$$18 - 3y = 10 - y$$

④ $18 - 3y = 10 - y \Rightarrow 18 = 2y + 10$
 $8 = 2y \Rightarrow y = 4$

⑤ $2x = 10 - y \Rightarrow 2x = 10 - 4$
 $2x = 6 \Rightarrow x = 3$

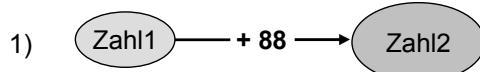
Aufgabe 7.2

(Seite 180)

- a) Die Differenz zweier Zahlen beträgt 88. Die eine Zahl ist 5 mal so gross wie die andere Zahl.

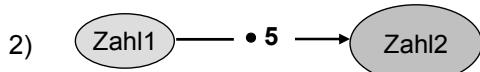
Wie heissen die beiden Zahlen?

① Analyse

1) 

②

$$[\text{kleinere Zahl}] + 88 = [\text{grössere Zahl}]$$

2) 

$$[\text{kleinere Zahl}] \cdot 5 = [\text{grössere Zahl}]$$

③ $x = \text{kleinere Zahl} / y = \text{grössere Zahl}$

④ (1) $x + 88 = y$
(2) $5x = y$

⑤ $D = Q \times Q$

$$x + 88 = 5x$$

$$\rightarrow 88 = 4x$$

$$\rightarrow x = 22$$

$$5x = y$$

$$\rightarrow 5 \cdot 22 = y$$

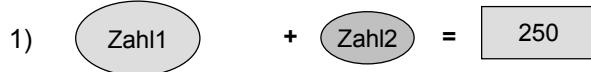
$$\rightarrow y = 110$$

Die beiden Zahlen lauten: **22 und 110**.

- b) Die Summe zweier Zahlen beträgt 250. Dividiert man die grösste durch die kleinere, so erhält man 3 Rest 2.

Wie heissen die beiden Zahlen?

① Analyse

1) 

②

$$[\text{Zahl 1}] + [\text{Zahl 2}] = 250$$

2) 

oder



$$([\text{Zahl 1}] - 2) : [\text{Zahl 2}] = 3$$

③ $x = \text{grössere Zahl} / y = \text{kleinere Zahl}$

④ (1) $x + y = 250$ $\rightarrow x = -y + 250$
(2) $\frac{x-2}{y} = 3$ $\rightarrow x = 3y + 2$

⑤ $D_x = \mathbb{Q}, D_y = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$$-y + 250 = 3y + 2 \rightarrow 248 = 4y$$

$$\rightarrow y = 62$$

$$x + y = 250 \rightarrow x + 62 = 250$$

$$\rightarrow x = 188$$

Die beiden Zahlen lauten: **62 und 188**.

Aufgabe 8.9

(Seite 215)

- ① Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten.

a) $\frac{a^{n+1} b^3}{c^n} : \frac{a^n b^2}{c^{n+1}}$

abc

$$\frac{a^{n+1} b^3}{c^n} \cdot \frac{c^{n+1}}{a^n b^2} \Rightarrow a^{n+1-n} b^{3-2} c^{(n+1)-n}$$

b) $\frac{a^{2n-1}}{b^{2n} c^{n-1}} : \frac{a^{n+1}}{b^n c^{n+1}}$

$a^{n-2} b^{-n} c^2$

$$\frac{a^{2n-1}}{b^{2n} c^{n-1}} \cdot \frac{b^n c^{n+1}}{a^{n+1}} \Rightarrow a^{(2n-1)-(n+1)} b^{n-2n} c^{(n+1)-(n-1)} \Rightarrow a^{2n-1-n-1} b^{n-2n} c^{n+1-n+1}$$

c) $\frac{a^{1-n} b^{2n}}{a^{3n}} : \frac{b^{n+1}}{a^{2n-1}}$

$a^{-2n} b^{n-1}$

$$\frac{a^{1-n} b^{2n}}{a^{3n}} \cdot \frac{a^{2n-1}}{b^{n+1}} \Rightarrow a^{(1-n)+(2n-1)-3n} b^{2n-(n+1)} \Rightarrow a^{1-n+2n-1-3n} b^{2n-n-1}$$

d) $\frac{a^{2n}}{b^{2n-1} c^{1-n}} : \frac{a^{n-1}}{b^{2-n} c^{n-2}}$

$a^{n+1} b^{3-3n} c^{2n-3}$

$$\frac{a^{2n}}{b^{2n-1} c^{1-n}} \cdot \frac{b^{2-n} c^{n-2}}{a^{n-1}} \Rightarrow a^{2n-(n-1)} b^{(2-n)-(2n-1)} c^{(n-2)-(1-n)} \Rightarrow a^{2n-n+1} b^{2-n-2n+1} c^{n-2-1+n}$$

e) $\frac{a^2 b^{-2}}{a^3} : \frac{a^{-4}}{b^3}$

$a^3 b$

$$\frac{a^2 b^{-2}}{a^3} \cdot \frac{b^3}{a^{-4}} \Rightarrow a^{2-3-(-4)} b^{(-2)+3} \Rightarrow a^{2-3+4} b^{-2+3}$$

f) $\frac{a^{1-n} b^2}{b^{n-1}} : \frac{b^{2n}}{a^{2n}}$

$a^{1+n} b^{3-3n}$

$$\frac{a^{1-n} b^2}{b^{n-1}} \cdot \frac{a^{2n}}{b^{2n}} \Rightarrow a^{1-n+2n} b^{2-(n-1)-2n} \Rightarrow a^{1-n+2n} b^{2-n+1-2n}$$