b) (1) $3x + 5y = 21$
(2) $5x + 4y = 22$

Variante 1: x soll zuerst wegfallen

❶ **Definitionsmenge**

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Gleichung(en) umformen**

Gleichung(en) **geeignet multiplizieren**

hier: Gleichung (1) mit 5
Gleichung (2) mit (−3)

$$\begin{array}{lrcrcrl} (1) & 3x & + & 5y & = & 21 & \mid \bullet 5 \\ (1)' & 15x & + & 25y & = & 105 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrl} (2) & 5x & + & 4y & = & 22 & \mid \bullet (-3) \\ (2)' & -15x & - & 12y & = & -66 & \end{array}$$

❸ **Eliminieren einer der Variablen**

Die beiden Gleichungen **addieren**:

$$\begin{array}{lrcrcr} (1)' & 15x & + & 25y & = & 105 \\ (2)' & \underline{-15x} & \underline{-} & \underline{12y} & \underline{=} & \underline{-66} \\ & & & 25y - 12y & = & 105 - 66 \end{array}$$

❹ **Verbleibende 1. Variable ausrechnen**

$13y = 39 \quad \mid : 13$

$\underline{y = 3}$

❺ **2. Variable ausrechnen**

Den Wert der berechneten Variable in einer der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen.
hier: y in Gleichung (1)

$3x + 5y = 21$ und $y = 3$

$3x + 5 \bullet 3 = 21$
$3x + 15 = 21 \quad \mid - 15$
$3x = 6 \quad \mid : 3$

$\underline{x = 2}$

❻ **Lösungsmenge**

$L = \{(2 \mid 3)\}$

Variante 2: y soll zuerst wegfallen

❶ **Definitionsmenge**

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Gleichung(en) umformen**

Gleichung(en) **geeignet multiplizieren**

hier: Gleichung (1) mit 4
Gleichung (2) mit (−5)

$$\begin{array}{lrcrcrl} (1) & 3x & + & 5y & = & 21 & \mid \bullet 4 \\ (1)' & 12x & + & 20y & = & 84 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrl} (2) & 5x & + & 4y & = & 22 & \mid \bullet (-5) \\ (2)' & -25x & - & 20y & = & -110 & \end{array}$$

❸ **Eliminieren einer der Variablen**

Die beiden Gleichungen **addieren**:

$$\begin{array}{lrcrcr} (1)' & 12x & + & 20y & = & 84 \\ (2)' & \underline{-25x} & \underline{-} & \underline{20y} & \underline{=} & \underline{-110} \\ & 12x - 25x & & & = & 84 - 110 \end{array}$$

❹ **Verbleibende 1. Variable ausrechnen**

$-13x = -26 \quad \mid : (-13)$

$\underline{x = 2}$

❺ **2. Variable ausrechnen**

Den Wert der berechneten Variable in einer der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen.
hier: x in Gleichung (1)

$3x + 5y = 21$ und $x = 2$

$3 \bullet 2 + 5y = 21$
$6 + 5y = 21 \quad \mid - 6$
$5y = 15 \quad \mid : 5$

$\underline{y = 3}$

❻ **Lösungsmenge**

$L = \{(2 \mid 3)\}$

c) (1) $4x + 3y = 7$

(2) $7x + 6y = 10$

D =

L =

d) (1) $5x - 8y = -6$

(2) $2x + 6y = -7$

D =

L =

6.4.3 pq-Formel

Neben den beiden mathematischen Methoden der Faktorzerlegung und der quadratischen Ergänzung gibt es auch Lösungsmethoden, die auf Formeln basieren: die pq- und die abc-Formel der quadratischen Gleichungen.

Haben wir eine quadratische Gleichung, bei der vor dem x^2 der Faktor 1 steht, lässt sich die pq-Formel anwenden.

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Die mathematische Herleitung der pq-Formel können Sie im Kapitel 6.4.4 nachvollziehen.

Allgemeines Lösungsvorgehen:

❶ Definitionsmenge bestimmen

❷ Gleichung in die pq-Normalform bringen (wenn nötig), und die Werte für p und q bestimmen
! Achtung: Die Vorzeichen von p und q auch übernehmen.

❸ Werte für p und q in der Formel einsetzen *(inkl. Vorzeichen* **!** *)*

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen

❺ Lösungsmenge bestimmen

Beispiele (G = ℝ)

a) $x^2 + 4x - 221 = 0$

❶ D = ℝ

❷ Wir bestimmen zuerst p und q.
(falls der Faktor vor $x^2 \neq 1$ ist, muss die Gleichung noch durch diesen dividiert werden)

$$x^2 \underbrace{+\ 4}_{p}x \ \underbrace{-\ 221}_{q} = 0$$

Die **Vorzeichen** gehören zu p und q dazu **!**

❸ Die Werte für p und q in der Formel einsetzen: **p = 4**, **q = −221**

$$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-221)}$$

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 221}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{225}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 15$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 - 15 \quad \Rightarrow x_1 = \underline{-17}$$

$$\Rightarrow x_2 = -2 + 15 \quad \Rightarrow x_2 = \underline{13}$$

❺ $L = \{ -17 ; 13 \}$

b) $2x^2 - 6x = -2$

❶ $D = \mathbb{R}$

❷ Gleichung in die pq-Normalform bringen:

$2x^2 - 6x = -2 \qquad | + 2$

$2x^2 - 6x + 2 = 0 \qquad | : 2$ (d.h. durch den Faktor vor x^2 dividieren)

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x^2 \underbrace{- 3}_{p}x \underbrace{+ 1}_{q} = 0$$

❸ Die Werte für p und q in der Formel einsetzen: **$p = -3$**, **$q = 1$**

$$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 1}$$

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen:

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{2.25 - 1}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{1.25}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm 1.1180...$

$\Rightarrow x_1 = 1.5 - 1.1180... \quad \Rightarrow x_1 = \underline{0.3819...}$

$\Rightarrow x_2 = 1.5 + 1.1180... \quad \Rightarrow x_2 = \underline{2.6180...}$

❺ $L = \{ 0.38 ; 2.62 \}$

c) $x^2 - 3x = 54$

D =

L =

Aufgabe 8.12

Bezeichnen Sie alle richtigen Umformungen.

a) $\frac{4}{a^4}$	☐ $4a^{-4}$	☐ $\left(\frac{a^2}{2}\right)^{-2}$	☐ $\left(4a^4\right)^{-1}$	☐ $\frac{a^{-4}}{4}$	☐ $\left(-2a^{-2}\right)^2$
b) $\left(-4a^{-2}\right)^2$	☐ $16a^{-4}$	☐ $\frac{16}{a^4}$	☐ $4a^{-4}$	☐ $(4a)^{-4}$	☐ $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-4}$
c) $\left(\frac{a^2}{(-a)^3}\right)^{-2}$	☐ $(-a)^2$	☐ $(-a)^{-2}$	☐ $-a^2$	☐ $\left(\frac{1}{a}\right)^{-2}$	☐ a^2
d) $-a^5$	☐ $(-a)^5$	☐ $\left(-\frac{1}{a}\right)^{-5}$	☐ $-\left(\frac{1}{a}\right)^{-5}$	☐ $(-a)^3 \bullet a^2$	☐ $-a^6 \bullet \left(\frac{1}{a}\right)$
e) $\frac{a^3}{3}$	☐ $\frac{3}{a^{-3}}$	☐ $\left(\frac{3}{a^3}\right)^{-1}$	☐ $\frac{1}{3a^{-3}}$	☐ $\left(\frac{-3}{a^3}\right)^{-1}$	☐ $\left(\frac{-3}{(-a)^3}\right)^{-1}$
f) $\left(\frac{-a}{2}\right)^4$	☐ $\frac{-a^4}{16}$	☐ $2^{-4}\,a^4$	☐ $\left(\frac{a^2}{4}\right)^2$	☐ $\left(\frac{-a^2}{4}\right)^2$	☐ $\left(16a^{-4}\right)^{-1}$

Aufgabe 8.13

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{R}$ [für die Aufgaben a) bis o)] bzw. $\mathbb{R}^+$ [ab Aufgabe p)].
(wenn nötig auf 4 signifikante Dezimalstellen runden)

a) $x^4 = 150.0625$	b) $x^3 = 3.375$	c) $x^5 = 7'776$
d) $x^{-6} = 729$	e) $x^{-7} = 13$	f) $x^{-4} = 16$
g) $2x^3 - 250 = 0$	h) $4x^4 - 20.25 = 0$	i) $3x^{-4} - 0.1875 = 0$
j) $(x+3)^3 = 216$	k) $(x+2)^5 = 33$	l) $(x-1)^{-4} = 81$
m) $2\,(x-7)^4 = 512$	n) $0.2\,(x+1)^5 = 625$	o) $256\,(x+3)^{-8} = 65'536$
p) $x^{\frac{5}{6}} = 3$	q) $x^{-\frac{3}{5}} = 0.2$	r) $x^{1.5} = 27$
s) $x^{\frac{4}{3}} = 16$	t) $x^{-\frac{5}{2}} = 0.6$	u) $x^{-\frac{2}{7}} = 0.25$

Aufgabe 9.4

Berechnen Sie die Resultate der folgenden Additionen und Subtraktionen, und vereinfachen Sie so weit als möglich.

a) $\sqrt{a} + \sqrt{a}$ b) $\sqrt{a} - \sqrt{a}$ c) $2\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$

d) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}$ e) $2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a}$ f) $4\sqrt[3]{2a} - 3\sqrt[3]{2a}$

g) $6\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a}$ h) $\sqrt[4]{a} + \sqrt[5]{a}$ i) $\sqrt[4]{a} + \sqrt[8]{a^2}$

j) $\sqrt{a^4} + \sqrt[3]{a^6}$ k) $\sqrt{2a^4} + \sqrt[3]{4a^6}$ l) $\sqrt{(3a)^4} + \sqrt[3]{(5a)^6}$

m) $\sqrt[3]{a^5} + 2\sqrt[9]{a^{15}}$ n) $2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 4\sqrt{a}$ o) $9\sqrt[4]{a} + 2\sqrt[4]{a} - 3\sqrt[4]{a}$

p) $4\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a} + 8\sqrt{a}$ q) $10\sqrt[5]{ab} - (4\sqrt[5]{ab} + 3\sqrt[5]{ab})$ r) $9\sqrt{a} + (2\sqrt{a} - 7\sqrt{a})$

Aufgabe 9.5

Vereinfachen Sie folgende Wurzeln, und schreiben Sie die Lösung als Potenz.

a) $\sqrt{a^2}$ b) $\sqrt{a^4}$ c) $\sqrt[3]{a^9}$ d) $\sqrt[6]{a^2}$ e) $\sqrt[4]{a^2}$

f) $\sqrt[9]{\frac{1}{a^3}}$ g) $\sqrt[-5]{\frac{2}{a^{15}}}$ h) $\sqrt[-3]{\frac{27}{a^{18}}}$ i) $\sqrt{\sqrt{5}}$ j) $\sqrt{\sqrt{25a}}$

k) $\sqrt{\sqrt{81a}}$ l) $\sqrt{\sqrt{625a^2}}$ m) $\sqrt[3]{\sqrt{a^4}}$ n) $\sqrt[4]{\sqrt{a^6}}$ o) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$

p) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^4}}$ q) $\sqrt[4]{\sqrt{ab^6}}$ r) $\sqrt[3]{64\sqrt{a^9}}$ s) $\sqrt{81\sqrt[6]{a^2}}$ t) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^3}}$

Aufgabe 9.6

Berechnen und vereinfachen Sie so weit als möglich. Schreiben Sie die Lösung als Potenz.

a) $\sqrt{\sqrt{a}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6}}$ c) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$

e) $\sqrt{a^3\sqrt{a}}$ f) $\sqrt[4]{a^8\sqrt{a^6}}$ g) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[3]{a^2}}$ h) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}$

i) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}$ j) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}$ k) $\sqrt{2a\sqrt{a^3}}$ l) $\sqrt{2\sqrt{2a}}$

m) $\sqrt{3\sqrt{3a}}$ n) $\sqrt{a\sqrt{2a}}$ o) $\sqrt{a^5\sqrt{2a}}$ p) $\sqrt{2a^3\sqrt{2a}}$

q) $\sqrt[3]{2a\sqrt{2a}}$ r) $\sqrt[3]{2a^2\sqrt{a}}$ s) $\sqrt[3]{8a^6\sqrt{a^3}}$ t) $\sqrt{9a^5\sqrt{9a^3}}$