12.2 Kostenfunktion

a) Vorgaben und Fragestellung

Über die Herstellungskosten eines Produkts ist folgendes bekannt:

- ♦ Die variablen Material- und Lohnkosten betragen CHF 2.50 pro Stück.
- ♦ Die Fixkosten belaufen sich auf CHF 500.--.

Wie lautet die Kostenfunktion? Stellen Sie diese bis 1'000 Stück grafisch dar.

Definitionen

D = $\mathbb{N}_0$ Ą keine negativen Mengen und nur ganze Stück werden produziert
x = Menge in Stück
y = Gesamtkosten in CHF

Funktionsgleichung

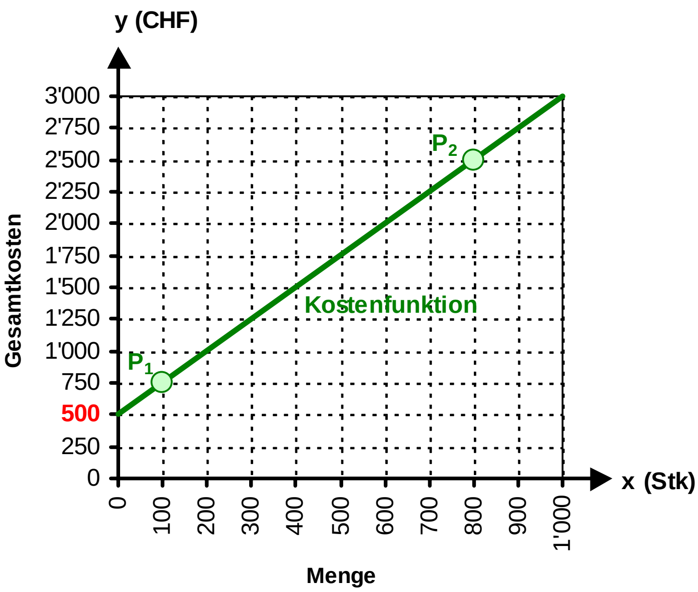
Die Kostenfunktion für den gegebenen Sachverhalt lautet: $y = 2.5x + 500$.

Berechnung der Gesamtkosten bei verschiedenen Mengen

Mit Hilfe obiger Funktionsgleichung lassen sich die Gesamtkosten für beliebige Mengen berechnen.

Gesamtkosten bei 100 Stück:	Gesamtkosten bei 800 Stück:	bei x Stück:
$y = 2.5 \bullet 100 + 500$ $\underline{y = 750}$	$y = 2.5 \bullet 800 + 500$ $\underline{y = 2'500}$	$y = 2.5 \bullet x + 500$
Ą Darstellung in Grafik: P_1 (100 | 750)	Ą Darstellung in Grafik: P_2 (800 | 2'500)	

Grafische Darstellung der Funktion



Merkmale der Kostenfunktion

- ♦ Die Kostenfunktion beginnt **nicht** im Ursprung (0 | 0).
- ♦ Startpunkt auf der Y-Achse ist der Betrag der **Fixkosten**, weil diese immer anfallen, auch wenn 0 Stück produziert werden.

Hinweis zur Grafik-Erstellung

Da beide Achsen oft unterschiedliche Massstäbe (Skalen) haben, muss die Funktion anhand einer **Wertetabelle** gezeichnet werden.

Interpretation der Funktionsgleichung

$\boxed{y = mx + q}$

m	sind die **variablen Kosten** pro Stück
x	ist die **Stückzahl**
mx	sind die **variablen** Kosten der produzierten Menge
q	sind die **fixen** Kosten
y	sind die **Gesamtkosten**

c) Vorgaben und Fragestellung

Wenn 50 Stück eines Produkts hergestellt werden, betragen die Gesamtkosten CHF 25.--, bei 70 Stück betragen sie CHF 33.--.
Wie lautet die Kostenfunktion? Stellen Sie diese bis 100 Stück grafisch dar.

Definitionen

D	=	$\mathbb{N}_0$
x	=	Menge in Stück
y	=	Gesamtkosten in CHF

Funktionsgleichung

¬ **Punkte P_1 und P_2 bestimmen**

P_1 (50 | 25), P_2 (70 | 33)

\- **Steigung m berechnen**

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Ą $m = \frac{33 - 25}{70 - 50}$ Ą $m = \frac{8}{20}$ Ą $\underline{m = 0.4}$

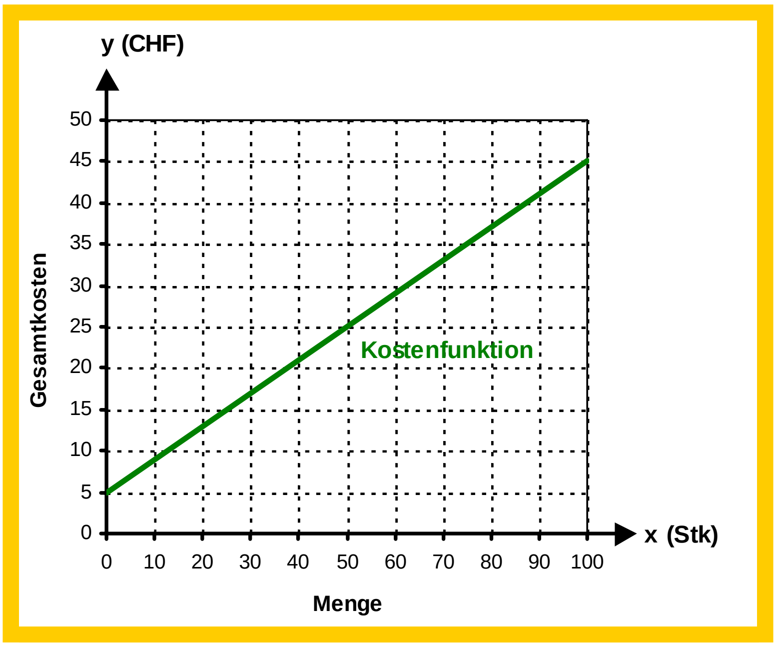
® **q berechnen**

$q = y - mx$
Ą $m = 0.4$ und P_1 (50 | 25) einsetzen
$q = 25 - 0.4 \bullet 50$
$q = 25 - 20$
$\underline{q = 5}$

– **Funktionsgleichung notieren**

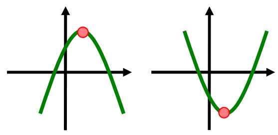
$y = 0.4x + 5$

Grafische Darstellung der Funktion



13.5 Techniken zur Berechnung des Scheitelpunkts

Der Scheitelpunkt ist der Punkt, in dem die Parabel die vertikale Richtung ändert. Es handelt sich also um den Punkt der Parabel mit dem **höchsten** Y-Wert (wenn $a < 0$) bzw. mit dem **niedrigsten** Y-Wert (wenn $a > 0$).



Die Koordinaten des Scheitelpunkts können auf mehrere Arten berechnet werden:

- über die **Nullstellen** Ą Kapitel 13.5.1
- über **Formeln** Ą Kapitel 13.5.2
- über **zwei Hilfspunkte mit gleichem Y-Wert** Ą Kapitel 13.5.3
- über die **Scheitelpunktform** Ą Kapitel 13.5.4

13.5.1 Über die Nullstellen

Da die quadratische Funktion symmetrisch ist (vgl. Kapitel 13.1), liegt der Scheitelpunkt in der **Mitte** zwischen den beiden Nullstellen (bzw. zwei Hilfspunkten mit gleichem Y-Wert).

a) $y = x^2 - 4$

¬ **Nullstellen bestimmen, falls nicht bekannt (vgl. Kapitel 13.4)**

$N_1\ (-2 \mid 0),\quad N_2\ (2 \mid 0) \quad \Rightarrow x_1 = \underline{-2},\quad x_2 = \underline{2}$

- **X-Koordinate (x_S) des Scheitelpunkts berechnen**

$$\boxed{x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

$$x_S = \frac{-2 + 2}{2}$$

$$x_S = \frac{0}{2}$$

$$x_S = \underline{0}$$

® **Y-Koordinate (y_S) des Scheitelpunkts berechnen: x_S in Ausgangsgleichung einsetzen**

$y = x^2 - 4$

$y_S = 0^2 - 4$

$y_S = \underline{-4}$

– **Scheitelpunkt** S (0 | −4)

b) $y = x^2 - 3x - 4$ bereits berechnete Nullstellen: $N_1\ (-1 \mid 0)$ und $N_2\ (4 \mid 0)$

¬ **Nullstellen** $N_1\ (-1 \mid 0),\ N_2\ (4 \mid 0) \quad \Rightarrow x_1 = \underline{-1},\quad x_2 = \underline{4}$

- **X-Koordinate (x_S) des Scheitelpunkts berechnen**

$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$ Ą $x_S = \frac{-1 + 4}{2}$ Ą $x_S = \frac{3}{2}$ Ą $x_S = \underline{1.5}$

® **Y-Koordinate (y_S) des Scheitelpunkts berechnen: x_S einsetzen**

$y = x^2 - 3x - 4$

$y_S = 1.5^2 - 3 \bullet 1.5 - 4$ Ą $y_S = 2.25 - 4.5 - 4$ Ą $y_S = \underline{-6.25}$

– **Scheitelpunkt:** S (1.5 | −6.25)

i) $y = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 24$

¬ $y = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 24$	$\mid -24$
$y - 24 = \frac{3}{4}x^2 - 6x$	$\mid \bullet \frac{4}{3}$
$\frac{4(y-24)}{3} = x^2 - 8x$	$\mid$ quadratisch ergänzen: $(x-b)^2 = x^2 - 2xb + b^2$

$$\underbrace{x^2 - 8x}_{x^2 - 2xb + b^2}$$

$x^2 - 2xb + b^2$ d.h. $2xb = 8x$ Ą $b = 4$

$$\frac{4(y-24)}{3} \boxed{+ b^2} = \underbrace{x^2 - 2 \bullet x \bullet 4 \boxed{+ b^2}}$$

$$\frac{4(y-24)}{3} \boxed{+ 4^2} = (x - 4)^2$$

$\frac{4(y-24)}{3} + 4^2 = x^2 - 8x + 4^2$	$\mid$ ausrechnen
$\frac{4(y-24)}{3} + 16 = x^2 - 8x + 16$	$\mid$ rechte Seite als binomische Formel schreiben
$\frac{4(y-24)}{3} + 16 = (x-4)^2$	$\mid \bullet \frac{3}{4}$
$y - 24 + 12 = \frac{3}{4}(x-4)^2$	$\mid$ zusammenfassen
$y - 12 = \frac{3}{4}(x-4)^2$	$\mid + 12$

Scheitelpunktform: $y = \frac{3}{4}(x-4)^2 + 12$

- **Scheitelpunkt S (x_S | y_S) ablesen**

Y-Koordinate (y_S)	X-Koordinate (x_S)
$y = a(x - x_S)^2 \boxed{+ y_S}$	$y = a(x \boxed{- x_S})^2 + y_S$
$y = \frac{3}{4}(x-4)^2 \boxed{+ 12}$	$y = \frac{3}{4}(x \boxed{- 4})^2 + 12$
Ą $y_S = \underline{12}$	**Achtung:** x_S ist mit dem **falschen Vorzeichen** vorhanden**!**
	$-x_S = -4$ Ą $x_S = \underline{+4}$

- **Scheitelpunkt:** S (4 | 12)

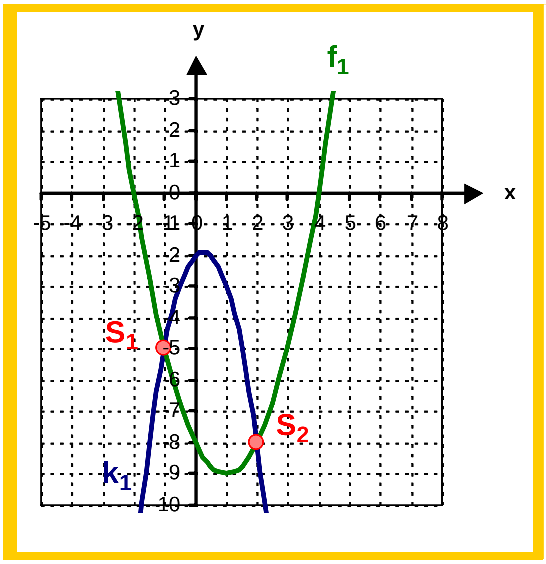
Aufgabe 13.11

Ermitteln Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln, und zeichnen Sie beide Funktionen in ein Koordinatensystem ein.

a) f_1: $y = x^2 - 2x - 8$

k_1: $y = -2x^2 + x - 2$

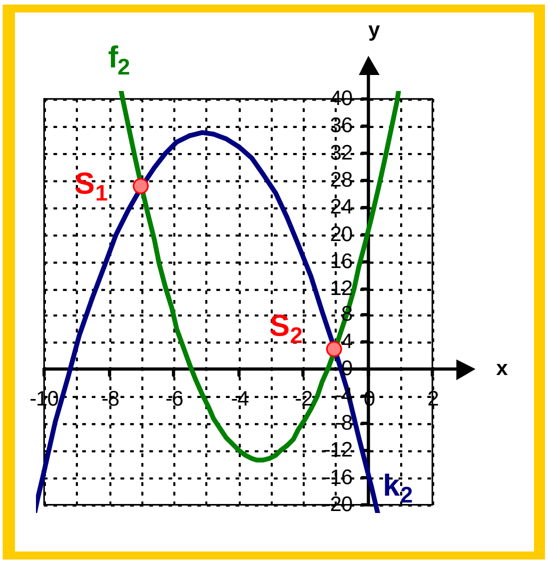
S_1 (−1 | −5), S_2 (2 | −8)



b) f_2: $y = 3x^2 + 20x + 20$

k_2: $y = -2x^2 - 20x - 15$

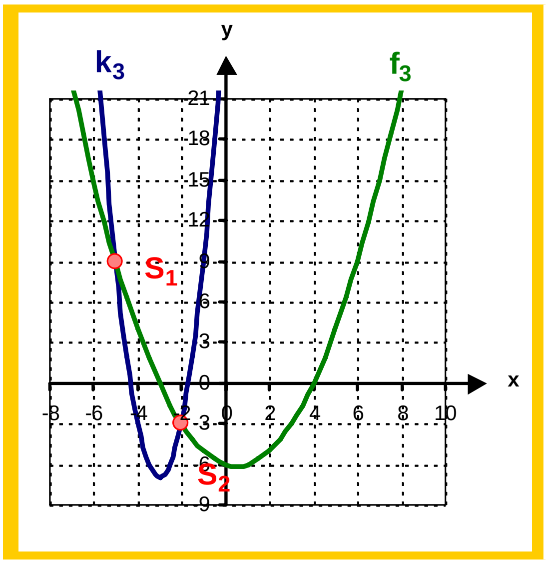
S_1 (−7 | 27), S_2 (−1 | 3)



c) f_3: $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 6$

k_3: $y = 4x^2 + 24x + 29$

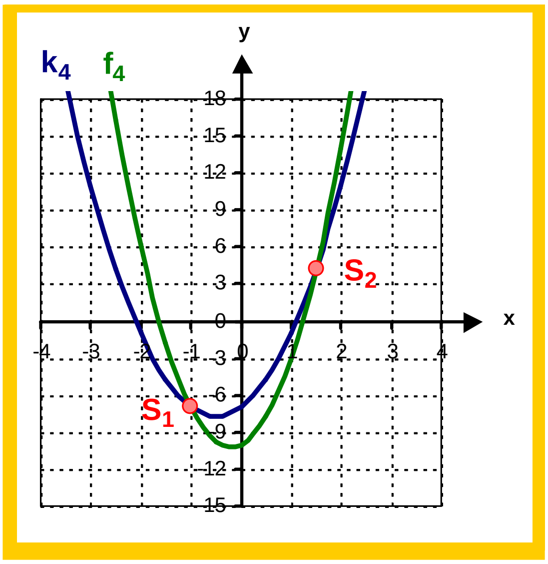
S_1 (−5 | 9), S_2 (−2 | −3)



d) f_4: $y = 5x^2 + 2x - 10$

k_4: $y = 3x^2 + 3x - 7$

S_1 (−1 | −7), S_2 (1.5 | 4.25)



15.2 Preisbildung mit linearen Funktionen

a) Das Marktverhalten lässt sich im Bereich zwischen 20 und 100 Stück mit folgenden linearen Funktionen beschreiben (wobei x Stück und y CHF bedeuten):

Angebot: $y = \frac{4}{5}x + 20$ Nachfrage: $y = -\frac{3}{5}x + 90$

- Stellen Sie die Funktionen grafisch dar.
- Wie hoch sind der Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge?

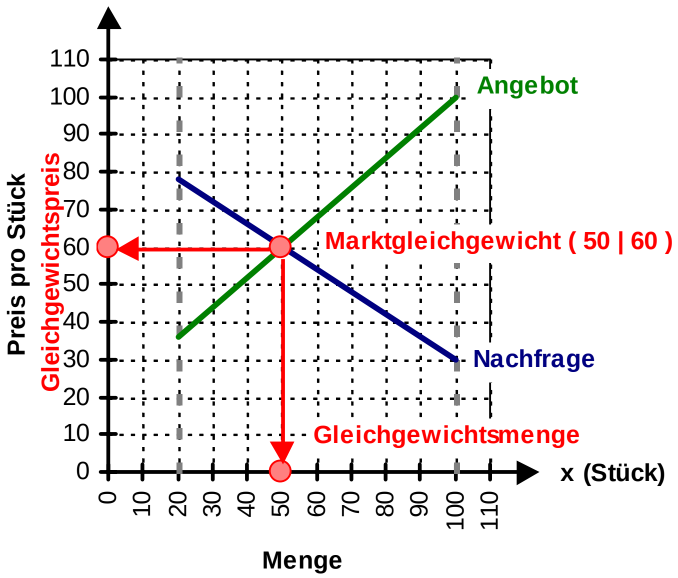
¬ **Definitionen**

$D = \{ x \in \mathbb{N} \mid 20 \leq x \leq 100 \}$

x = Menge in Stück

y = Stückpreis in CHF

- **Grafische Darstellung**



® **Berechnung des Marktgleichgewichts**

- Gleichgewichtsmenge berechnen:
  Angebots- und Nachfragefunktion einander **gleichsetzen**

$\frac{4}{5}x + 20 = -\frac{3}{5}x + 90 \qquad | \bullet 5$

$4x + 100 = -3x + 450 \qquad | + 3x, - 100$

$7x = 350 \qquad | : 7$

$\underline{x = 50}$

- Gleichgewichtspreis berechnen:
  x in der Angebots- oder Nachfragefunktion **einsetzen** (hier: in der Angebotsfunktion)

$y = \frac{4}{5}x + 20 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{5} \bullet 50 + 20 \quad \Rightarrow \quad y = 40 + 20 \quad \Rightarrow \quad \underline{y = 60}$

– **Marktgleichgewicht**

Der Gleichgewichtspreis beträgt **CHF 60.--** bei einer Gleichgewichtsmenge von **50 Stück**.

b) Das Marktverhalten lässt sich im Bereich zwischen 10 und 100 Stück mit folgenden linearen Funktionen beschreiben (wobei x Stück und y CHF bedeuten):

Angebot: $y = \frac{3}{4}x + 30$ Nachfrage: $y = -\frac{1}{2}x + 105$

- Stellen Sie die Funktionen grafisch dar.
- Wie hoch sind der Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge?

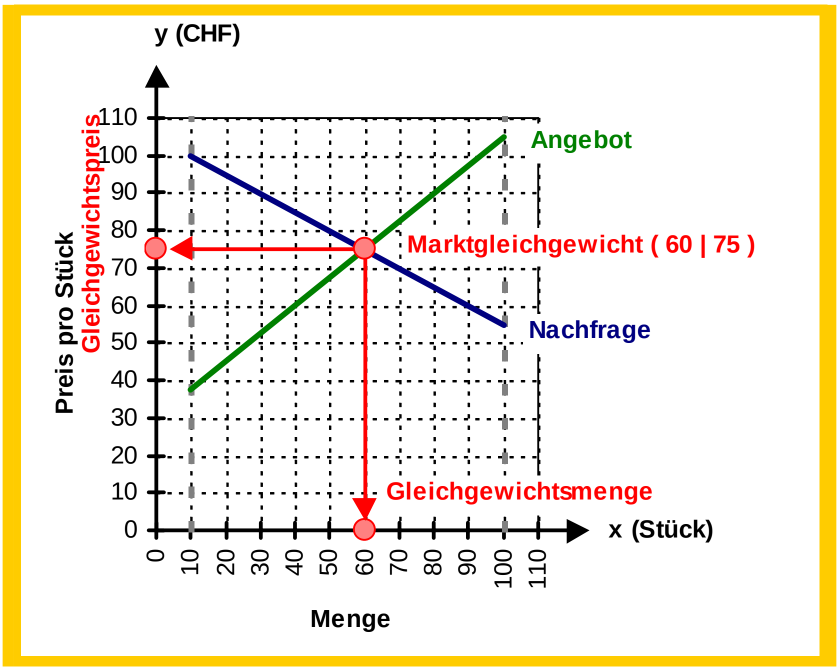
¬ **Definitionen**

$D = \{ x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 100 \}$

x = Menge in Stück

y = Stückpreis in CHF

\- **Grafische Darstellung**



® **Berechnung des Marktgleichgewichts**

Gleichgewichtsmenge berechnen:

$\frac{3}{4}x + 30 = -\frac{1}{2}x + 105 \quad | \bullet 4$

$3x + 120 = -2x + 420 \quad | + 2x$

$5x + 120 = 420 \quad | - 120$

$5x = 300 \quad | : 5$

$\underline{x = 60}$

Gleichgewichtspreis berechnen (hier: x in der Angebotsfunktion einsetzen):

$y = \frac{3}{4}x + 30 \Rightarrow y = \frac{3}{4} \bullet 60 + 30 \Rightarrow y = 45 + 30 \Rightarrow \underline{y = 75}$

– **Marktgleichgewicht**

Der Gleichgewichtspreis beträgt **CHF 75.--** bei einer Gleichgewichtsmenge von **60 Stück**.

16.4 Kategorielle Merkmale: Häufigkeitstabelle, Auswertung und Visualisierung

1) Erheben Sie in Ihrer Klasse, welches der folgenden Desserts am liebsten gegessen wird: Glacé, Tiramisu, Kuchen, Schokolade oder Früchte.

   Erstellen Sie zu Ihrer Erhebung eine Urliste, eine Strichliste sowie eine Häufigkeitstabelle, und beantworten Sie die folgenden Fragen.

   a) Welches Dessert ist am beliebtesten?

   b) Wie viele Schüler/-innen haben dieses Dessert genannt?

   c) Wie viele Prozent der Klasse haben dieses Dessert genannt?

   d) Welches Dessert ist am wenigsten beliebt?
   Wie viele Prozent der Klasse haben es genannt?

   Stellen Sie die erhobenen Daten grafisch dar. Welches ist der häufigste Wert (sog. Modus)?

Urliste

Merkmal: Lieblingsdessert

Glacé Tiramisu Tiramisu Tiramisu Kuchen Tiramisu Glacé Tiramisu Tiramisu Kuchen Tiramisu Glacé
Tiramisu Glacé Glacé Tiramisu Schokolade Tiramisu Kuchen Glacé Früchte Glacé Schokolade Kuchen

Strichliste

Merkmal: Lieblingsdessert

Glacé: 卌 II   Tiramisu: 卌 卌   Kuchen: IIII   Schokolade: II   Früchte: I

Häufigkeitstabelle

1. Spalte i Ą Eintragen einer **fortlaufenden Nummer**, beginnend ab 1 (i = Index)
2. Spalte x_i Ą Eintragen der Desserts **(= Ausprägungen)**, die Reihenfolge ist frei wählbar
3. Spalte n_i Ą Eintragen, <u>wie oft</u> jedes Dessert erhoben wurde **(= absolute Häufigkeit)**
4. Spalte h_i Ą Berechnen des <u>Anteils</u> der Desserts an der Gesamtzahl Schüler/-innen:

   $\boxed{\text{absolute Häufigkeit : Anzahl Schüler/-innen}}$ **(= relative Häufigkeit)**

   Die Angabe erfolgt üblicherweise als Dezimalzahl und nicht als eigentliche Prozentzahl. Es ist aber klar, dass 0.29166... = 29.166... % bedeutet.

Merkmal: Lieblingsdessert

i	x_i	n_i	h_i
1	Glacé	7	0.29166...
2	Tiramisu	10	0.41666...
3	Kuchen	4	0.16666...
4	Schokolade	2	0.08333...
5	Früchte	1	0.04166...

Feld x_5 Feld n_4

Berechnen der relativen Häufigkeit in der Spalte h_i:

(= 7 : 24*)
(= 10 : 24*)
(= 4 : 24*)
(= 2 : 24*)
(= 1 : 24*)

* 24 = Anzahl Schüler/-innen
d.h. Total der Spalte n_i

Beantwortung der Fragen

a) **Tiramisu** (= x_2) Ą Ausprägung mit dem grössten Wert in der Spalte n_i

b) **10 Personen** (= n_2)

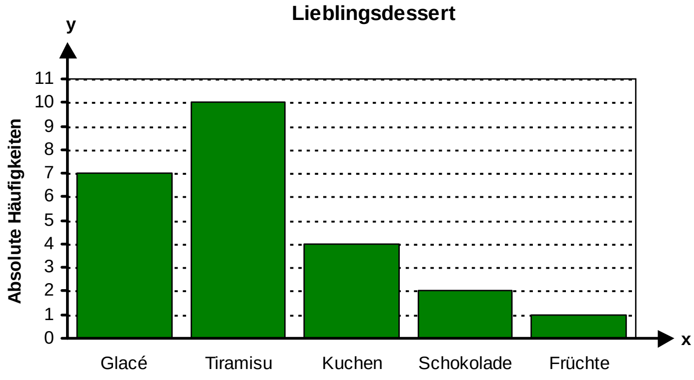
c) **41.67 %** (= h_2) Ą 0.41666... bedeutet 41.666... %

d) **Früchte, 4.17 %** (= x_5, h_5) Ą Ausprägung mit dem kleinsten Wert in der Spalte n_i

Grafische Darstellung

Kategorielle Merkmale können in einem Säulen- oder Kreisdiagramm visualisiert werden.

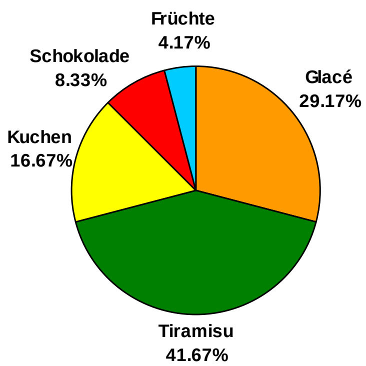
¡ **Säulendiagramm**



- Für jede Ausprägung wird eine Säule gezeichnet.
- Alle Säulen werden gleich breit gezeichnet.
- Die Höhe der Säulen kann die absolute oder relative Häufigkeit der Ausprägungen darstellen.

¢ **Kreisdiagramm**

- Für jede Ausprägung wird ein Kreissegment gezeichnet.
- Die Fläche eines Segments ist proportional zur relativen Häufigkeit der Ausprägung am Stichprobenumfang.



Das erste Segment beginnt – verglichen mit einer Uhr – an der Position 12.00 Uhr. Die restlichen Segmente werden im Uhrzeigersinn hinzugefügt.

Die Grösse eines Segments wird durch das Abtragen des entsprechenden Winkels bestimmt.

Berechnung des Winkels: $\boxed{\text{Relative Häufigkeit } (h_i) \bullet 360^\circ}$

Beispiel:
Winkel für Glacé: 105° (= 0.29166… • 360°)

Aus dem Diagramm ablesbare Kennzahl

Modus: Ausprägung, die **am häufigsten** erhoben wurde

Der Modus (hier: Tiramisu) ist sofort ersichtlich:
– im Säulendiagramm als Ausprägung mit der höchsten Säule
– im Kreisdiagramm als Ausprägung mit dem grössten Segment

Gegenüberstellung von Kreis- und Säulendiagramm

- Der Modus ist in einem Säulendiagramm sofort als höchste Säule erkennbar. In einem Kreisdiagramm ist das grösste Segment weniger schnell erkennbar, weil das menschliche Auge Flächen weniger gut miteinander vergleichen kann.
- Die einzelnen Ausprägungen können in einem Kreisdiagramm weniger schnell nach ihrer Häufigkeit geordnet werden als in einem Säulendiagramm.

Fazit: Das **Säulendiagramm** ist dem Kreisdiagramm **vorzuziehen**!

2) Die Befragung "Welchen Buchtyp bevorzugen Sie?" hat folgende Antworten ergeben:
Biografie / Sachbuch / Hörbuch / Krimi / Roman / Krimi / Krimi / Roman / Krimi / Roman / Krimi / Hörbuch / Roman / Roman / Sachbuch / Roman / Krimi / Krimi / Krimi / Hörbuch.

Vervollständigen Sie die untenstehende Häufigkeitstabelle, und beantworten Sie die folgenden Fragen.

a) Welcher Buchtyp wird von den meisten Befragten bevorzugt?

b) Wie viele Befragte bevorzugen diesen Buchtyp?

c) Wie viele Prozent der Befragten bevorzugen diesen Buchtyp?

d) Welcher Buchtyp ist bei den wenigsten Befragten beliebt?
Wie viele Prozent der Befragten haben diesen genannt?

Stellen Sie die erhobenen Daten grafisch dar.
Welche Kennzahl lässt sich direkt aus dem Diagramm ablesen und wie gross ist sie?

Häufigkeitstabelle

Merkmal: Bevorzugter Buchtyp

i	x_i	n_i	h_i	Berechnen der relativen Häufigkeit in der Spalte h_i:
1	Biografie	1	0.05	(= 1 : 20*)
2	Sachbuch	2	0.1	(= 2 : 20*)
3	Hörbuch	3	0.15	(= 3 : 20*)
4	Krimi	8	0.4	(= 8 : 20*)
5	Roman	6	0.3	(= 6 : 20*)

* 20 = Anzahl Befragter
d.h. Total der Spalte n_i

Beantwortung der Fragen

a) **Krimi** (= x_4) Ą Ausprägung mit dem grössten Wert in der Spalte n_i

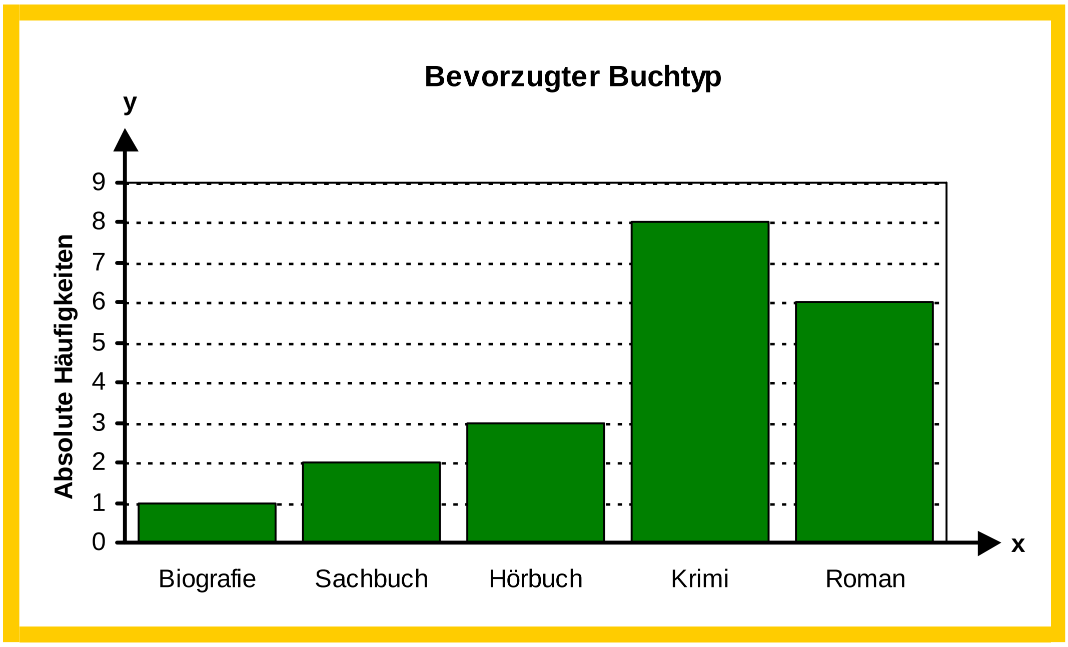
b) **8 Personen** (= n_4)

c) **40 %** (= h_4)

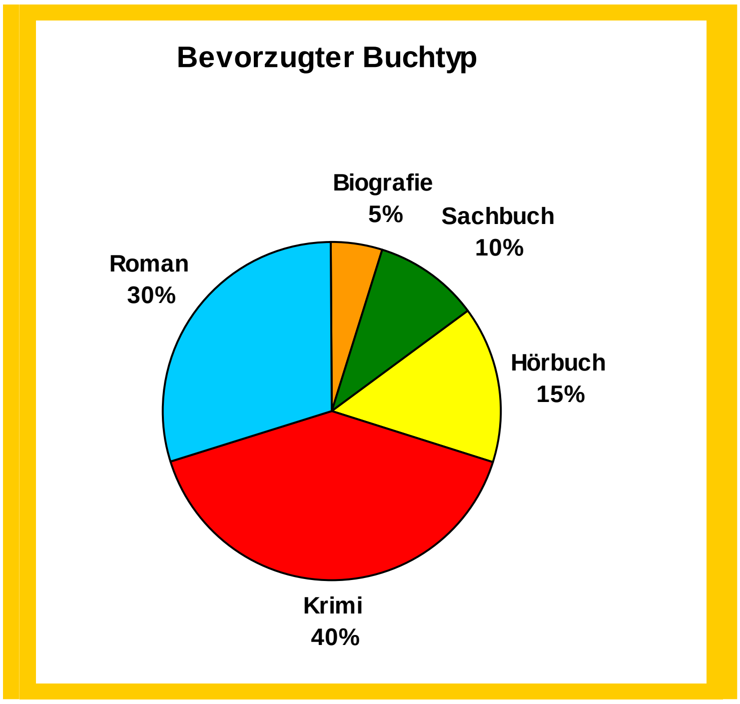
d) **Biografie, 5 %** (= x_1, h_1) Ą Ausprägung mit dem kleinsten Wert in der Spalte n_i

Grafische Darstellung

Säulendiagramm:



Kreisdiagramm:



Aus dem Diagramm ablesbare Kennzahl

Name der Kennzahl	Ergebnis
Modus	**Krimi**

c) Berechnung

Der **wievielte Wert** der <u>geordneten Stichprobe</u> dem Median entspricht, lässt sich entweder manuell durch Abzählen oder mit einer Formel bestimmen.

Die Formeln für den Median $\tilde{x}$ (ausgesprochen als "x Tilde") lauten:

n ist **ungerade**

$$\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$$

n ist **gerade**

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \bullet x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}$$

n Anzahl Stichprobenwerte (Stichprobenumfang)

$x_{\frac{n+1}{2}}$ steht für den $\frac{n+1}{2}$-ten Wert der geordneten Stichprobe

Analoge Erläuterungen gelten für die Formel, wenn n gerade ist.

Beispiele

4) Merkmal: Beim Hochsprung in einer Schulklasse erzielte Höhen (in cm)

Erhobene Werte:

120 / 145 / 115 / 90 / 140 / 130 / 105 / 155 / 120 / 160 / 125

Berechnen Sie den Median.

¬ **Geordnete Stichprobe notieren** (Daten vom kleinsten zum grössten Wert sortieren)

$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$x_{(3)}$	$x_{(4)}$	$x_{(5)}$	$x_{(6)}$	$x_{(7)}$	$x_{(8)}$	$x_{(9)}$	$x_{(10)}$	$x_{(11)}$
90	105	115	120	120	125	130	140	145	155	160

\- **Median ermitteln** (mit Formel für "n ist ungerade", da n = 11)

$\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$ Ą $\tilde{x} = x_{\frac{11+1}{2}}$ Ą $\tilde{x} = x_{(6)}$ Ą $\underline{\tilde{x} = 125}$

<u>Interpretation:</u> Der **6. Stichprobenwert [$x_{(6)}$]** entspricht dem Median.

90 105 115 120 120 $\boxed{125}$ 130 140 145 155 160

Der Median liegt bei **125 cm**.

Zum Vergleich: Der Mittelwert liegt bei ≈ 127.7 cm.

5) Merkmal: Sonnenscheindauer vom 1. bis 13. Juni (in Stunden)

Erhobene Werte: 6.5 / 3 / 8 / 4 / 5 / 2 / 4 / 3 / 7.5 / 6 / 5.5 / 4 / 7

Berechnen Sie den Median.

¬ **Geordnete Stichprobe notieren** (Daten vom kleinsten zum grössten Wert sortieren)

$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$x_{(3)}$	$x_{(4)}$	$x_{(5)}$	$x_{(6)}$	$x_{(7)}$	$x_{(8)}$	$x_{(9)}$	$x_{(10)}$	$x_{(11)}$	$x_{(12)}$	$x_{(13)}$
2	3	3	4	4	4	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8

\- **Median ermitteln** (mit Formel für "n ist ungerade", da n = 13)

$\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$ Ą $\tilde{x} = x_{\frac{13+1}{2}}$ Ą $\tilde{x} = x_{(7)}$ Ą $\underline{\tilde{x} = 5}$

Der Median liegt bei **5 Sonnenstunden**.