

Aufgabe 5.10 (Seite 147)

- ① Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit Hilfe des Additionsverfahrens.

a) (1) $\frac{6}{x} + \frac{2}{y} = 7$
 (2) $\frac{10}{x} - \frac{5}{y} = -5$

⑥ $L = \left\{ \left(2 / \frac{1}{2} \right) \right\}$

① $D_x = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, D_y = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

② / ③ **Additionsverfahren**

(1) $\frac{6}{x} + \frac{2}{y} = 7 \quad | \cdot 5 \quad \rightarrow \quad (1)' \quad \frac{30}{x} + \frac{10}{y} = 35$

(2) $\frac{10}{x} - \frac{5}{y} = -5 \quad | \cdot 2 \quad \rightarrow \quad (2)' \quad \frac{20}{x} - \frac{10}{y} = -10$

$$\frac{30}{x} + \frac{20}{x} = 35 - 10$$

④ $\frac{50}{x} = 25 \quad \rightarrow \quad 50 = 25x \quad \rightarrow \quad \underline{x = 2}$

⑤ (1) $\frac{6}{x} + \frac{2}{y} = 7$
 $\rightarrow \frac{6}{2} + \frac{2}{y} = 7 \rightarrow 3 + \frac{2}{y} = 7 \rightarrow \frac{2}{y} = 4 \rightarrow 2 = 4y \rightarrow \underline{y = 0.5}$

b) (1) $\frac{3}{x} + \frac{9}{y} = -1$
 (2) $\frac{3}{y} - \frac{2}{x} = -\frac{25}{3}$

⑥ $L = \left\{ \left(\frac{3}{8} / -1 \right) \right\}$

① $D_x = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, D_y = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

② / ③ **Additionsverfahren**

(1) $\frac{3}{x} + \frac{9}{y} = -1 \quad \rightarrow \quad (1) \quad \frac{3}{x} + \frac{9}{y} = -1$

(2) $\frac{3}{y} - \frac{2}{x} = -\frac{25}{3} \quad | \cdot (-3) \quad \rightarrow \quad (2)' \quad \frac{6}{x} - \frac{9}{y} = 25$

$$\frac{3}{x} + \frac{6}{x} = -1 + 25$$

④ $\frac{9}{x} = 24 \quad \rightarrow \quad 9 = 24x \quad \rightarrow \quad \underline{x = \frac{3}{8}}$

⑤ (1) $\frac{3}{x} + \frac{9}{y} = -1$
 $\rightarrow \frac{3 \cdot 8}{3} + \frac{9}{y} = -1 \rightarrow 8 + \frac{9}{y} = -1 \rightarrow \frac{9}{y} = -9 \rightarrow 9 = -9y \rightarrow \underline{y = -1}$

Aufgabe 6.4 (Seite 183)

i) $x^2 + 4x = 10$

⑤ $L = \{-5.74, 1.74\}$

① $D = \mathbb{R}$

② $x^2 + 4x = 10$

$x^2 + 4x - 10 = 0 \rightarrow p = 4, q = -10$

③ $x_{1,2} = -\left(\frac{4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-10)}$

④ $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{14} \rightarrow x_{1,2} = -2 \pm 3.741... \rightarrow x_1 = \underline{-5.741...}, x_2 = \underline{1.741...}$

j) $x^2 - 10x = -9$

⑤ $L = \{1, 9\}$

① $D = \mathbb{R}$

② $x^2 - 10x = -9$

$x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow p = -10, q = 9$

③ $x_{1,2} = -\left(\frac{-10}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 9}$

④ $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{16} \rightarrow x_{1,2} = 5 \pm 4 \rightarrow x_1 = \underline{1}, x_2 = \underline{9}$

k) $(x+3)(x-4) = 44$

⑤ $L = \{-7, 8\}$

① $D = \mathbb{R}$

② $(x+3)(x-4) = 44$

$x^2 - 4x + 3x - 12 = 44$

$x^2 - x - 56 = 0 \rightarrow p = -1, q = -56$

③ $x_{1,2} = -\left(\frac{-1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-56)}$

④ $x_{1,2} = 0.5 \pm \sqrt{56.25} \rightarrow x_{1,2} = 0.5 \pm 7.5 \rightarrow x_1 = \underline{-7}, x_2 = \underline{8}$

l) $(x+12)(x-3) = 70$

⑤ $L = \{-15.74, 6.74\}$

① $D = \mathbb{R}$

② $(x+12)(x-3) = 70$

$x^2 - 3x + 12x - 36 = 70$

$x^2 + 9x - 106 = 0 \rightarrow p = 9, q = -106$

③ $x_{1,2} = -\left(\frac{9}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - (-106)}$

④ $x_{1,2} = -4.5 \pm \sqrt{126.25}$
 $x_{1,2} = -4.5 \pm 11.236... \rightarrow x_1 = \underline{-15.736...}, x_2 = \underline{6.736...}$

Aufgabe 7.2 (Seite 226)

b) Die Summe zweier Zahlen beträgt 250. Dividiert man die grössere durch die kleinere, so erhält man 3 Rest 2.

Wie heissen die beiden Zahlen?

① Analyse

$$1) \quad \text{Zahl1} + \text{Zahl2} = 250$$

$$[\text{Zahl 1}] + [\text{Zahl 2}] = 250$$

$$2) \quad \text{Zahl1} : \text{Zahl2} = 3, \text{ Rest 2}$$

oder

$$\text{Zahl1} - 2 : \text{Zahl2} = 3$$

$$([\text{Zahl 1}] - 2) : [\text{Zahl 2}] = 3$$

③ $x =$ grössere Zahl / $y =$ kleinere Zahl

$$④ (1) \quad x + y = 250 \quad \rightarrow \quad x = -y + 250$$

$$(2) \quad \frac{x-2}{y} = 3 \quad \rightarrow \quad x = 3y + 2$$

⑤ $D_x = \mathbb{Q}, \quad D_y = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$$-y + 250 = 3y + 2 \quad \rightarrow \quad 248 = 4y \quad \rightarrow \quad \underline{y = 62}$$

$$x + y = 250 \quad \rightarrow \quad x + 62 = 250 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 188}$$

⑥ Die beiden Zahlen lauten: **62 und 188.**

c) Zähler und Nenner eines Bruches ergeben zusammen 18. Addiert man zum Zähler 2 weniger als den aktuellen Wert des Zählers und zieht dieselbe Zahl beim Nenner ab, so erhält der Bruch den Wert 2.

Wie heisst der Bruch?

① Analyse

$$1) \quad \text{Zähler} + \text{Nenner} = 18 \quad [\text{Zähler}] + [\text{Nenner}] = 18$$

$$2) \quad \frac{\text{Zähler} + \text{Zähler} - 2}{\text{Nenner} - \text{Zähler} - 2} = \frac{2}{1} \quad \frac{[\text{Zähler}] + ([\text{Zähler}] - 2)}{[\text{Nenner}] - ([\text{Zähler}] - 2)} = \frac{2}{1}$$

③ $x =$ Zähler / $y =$ Nenner

$$④ (1) \quad x + y = 18 \quad \rightarrow \quad y = -x + 18$$

$$(2) \quad \frac{x+(x-2)}{y-(x-2)} = 2 \quad \rightarrow \quad 2x - 2 = 2y - 2x + 4 \quad \rightarrow \quad y = 2x - 3$$

⑤ $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \wedge y \neq (x - 2)$

$$-x + 18 = 2x - 3 \quad \rightarrow \quad 21 = 3x \quad \rightarrow \quad \underline{x = 7}$$

$$y = -x + 18 \quad \rightarrow \quad y = -7 + 18 \quad \rightarrow \quad \underline{y = 11}$$

⑥ Der Bruch lautet: $\frac{7}{11}$.

Aufgabe 8.10 (Seite 266)

$$l) \frac{a^{n+1} b^{1-2n} c^{-4n+1}}{a^n c^{3-n}} \cdot b^{2n-1} c^{3n+1}$$

$$a^{n+1-n} b^{1-2n+(2n-1)}$$

$$c^{-4n+1-(3-n)+(3n+1)}$$

$$\rightarrow a^{n+1-n} b^{1-2n+2n-1} c^{-4n+1-3+n+3n+1}$$

$$a c^{-1}$$

Aufgabe 8.11 (Seite 267)

- ① Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten.

$$a) \frac{a^4 b^3}{a} : a^2 b^2$$

$$ab$$

$$\frac{a^4 b^3}{a} \cdot \frac{1}{a^2 b^2}$$

$$\rightarrow a^{4-1-2} b^{3-2}$$

$$b) \frac{a^2 b^3}{c^2} : \frac{a^3 b^2}{c^3}$$

$$a^{-1} bc$$

$$\frac{a^2 b^3}{c^2} \cdot \frac{c^3}{a^3 b^2}$$

$$\rightarrow a^{2-3} b^{3-2} c^{3-2}$$

$$c) \frac{a^3 b^2}{b^4} : \frac{a^4 b}{b^3}$$

$$a^{-1}$$

$$\frac{a^3 b^2}{b^4} \cdot \frac{b^3}{a^4 b}$$

$$\rightarrow a^{3-4} b^{2+3-4-1}$$

$$d) \frac{a^3 b}{b^3} : \frac{a^2 b^2}{a}$$

$$a^2 b^{-4}$$

$$\frac{a^3 b}{b^3} \cdot \frac{a}{a^2 b^2}$$

$$\rightarrow a^{3+1-2} b^{1-3-2}$$

$$e) \frac{a^{-2} b^2}{b^{-3}} : \frac{ab^4}{a^4}$$

$$ab$$

$$\frac{a^{-2} b^2}{b^{-3}} \cdot \frac{a^4}{ab^4}$$

$$\rightarrow a^{(-2)+4-1} b^{2-(-3)-4}$$

$$f) \frac{4a^4 b^{-2}}{5c^{-2}} : \frac{2b^{-2}}{5a^2 c^3}$$

$$2a^6 c^5$$

$$\frac{4a^4 b^{-2}}{5c^{-2}} \cdot \frac{5a^2 c^3}{2b^{-2}}$$

$$\rightarrow \frac{20}{10} a^{4+2} b^{(-2)-(-2)} c^{3-(-2)}$$

Aufgabe 9.5 (Seite 290)

① Vereinfachen und kürzen Sie folgende Wurzeln, schreiben Sie die Lösung als Potenz.

a)	$\sqrt{a^2}$	$a^{\frac{2}{2}}$			a
----	--------------	-------------------	--	--	-----

b)	$\sqrt{a^4}$	$a^{\frac{4}{2}}$			a^2
----	--------------	-------------------	--	--	-------

c)	$\sqrt[3]{a^9}$	$a^{\frac{9}{3}}$			a^3
----	-----------------	-------------------	--	--	-------

d)	$\sqrt[6]{a^2}$	$a^{\frac{2}{6}}$			$a^{\frac{1}{3}}$
----	-----------------	-------------------	--	--	-------------------

e)	$\sqrt[4]{a^2}$	$a^{\frac{2}{4}}$			$a^{\frac{1}{2}}$
----	-----------------	-------------------	--	--	-------------------

f)	$\sqrt[9]{\frac{1}{a^3}}$	$\frac{\sqrt[9]{1}}{\sqrt[9]{a^3}}$	\rightarrow	$\frac{1}{a^{\frac{3}{9}}}$	$a^{-\frac{1}{3}}$
----	---------------------------	-------------------------------------	---------------	-----------------------------	--------------------

g)	$\sqrt[5]{\frac{2}{a^{15}}}$	$\frac{2^{-\frac{1}{15}}}{a^{-5}}$	\rightarrow	$\frac{2^{-\frac{1}{5}}}{a^{-3}}$	$\frac{a^3}{2^{\frac{1}{5}}}$
----	------------------------------	------------------------------------	---------------	-----------------------------------	-------------------------------

h)	$\sqrt[3]{\frac{27}{a^{18}}}$	$\frac{\sqrt[3]{27}}{a^{-6}}$	\rightarrow	$\frac{1}{a^{-6}}$	$\frac{a^6}{3}$
----	-------------------------------	-------------------------------	---------------	--------------------	-----------------

i)	$\sqrt{\sqrt{5}}$	Variante I	$2 \cdot \sqrt[2]{5}$	\rightarrow	$4\sqrt{5}$	$\frac{1}{5^{\frac{1}{4}}}$
		Variante II	$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$	\rightarrow	$5^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$	

j)	$\sqrt{\sqrt{25a}}$	Variante I	$\sqrt{5\sqrt{a}} \rightarrow \sqrt{5} \cdot \sqrt[2]{2\sqrt{a}} \rightarrow \sqrt{5} \sqrt[4]{a}$	$(25a)^{\frac{1}{4}}$ oder $5^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}}$
		Variante II	$\sqrt{5\sqrt{a}} \rightarrow 5^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 5^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$	

k)	$\sqrt{\sqrt{81a}}$	Variante I	$\sqrt{9\sqrt{a}} \rightarrow 3 \cdot \sqrt[2]{2\sqrt{a}} \rightarrow 3\sqrt[4]{a}$	$3a^{\frac{1}{4}}$
		Variante II	$\sqrt{9\sqrt{a}} \rightarrow 3 \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$	

Aufgabe 10.4 (Seite 315)

p) $\log_a x^2 + \log_a x$	$\log_a (x^2 \cdot x)$	$\log_a x^3$
q) $\log_a x^3 + \log_a \left(\frac{1}{x}\right)$	$\log_a \left(x^3 \cdot \frac{1}{x}\right)$	$\log_a x^2$
r) $\log_a (6x) + \log_a (2x)$	$\log_a (6x \cdot 2x)$	$\log_a (12x^2)$
s) $\log_a (2x^3) - \log_a x^2$	$\log_a (2x^3 : x^2)$	$\log_a (2x)$
t) $\log_a x - \log_a x^2$	$\log_a (x : x^2)$	$\log_a x^{-1}$
u) $\log_a x^2 - \log_a \left(\frac{1}{x}\right)$	$\log_a \left(x^2 : \frac{1}{x}\right)$	$\log_a x^3$
v) $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) - \log_a x^3$	$\log_a \left(\frac{1}{x} : x^3\right)$	$\log_a x^{-4}$
w) $\log_a 2 + \log_a \left(\frac{1}{4}\right)$	$\log_a \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right)$	$\log_a 0.5$
x) $\log_a 4 - \log_a \left(\frac{1}{4}\right)$	$\log_a \left(4 : \frac{1}{4}\right)$	$\log_a 16$
y) $\log_a 3 - \log_a \left(\frac{2}{3}\right)$	$\log_a \left(3 : \frac{2}{3}\right)$	$\log_a 4.5$
z) $\log_a \left(\frac{1}{3}\right) + \log_a \left(\frac{3}{2}\right)$	$\log_a \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)$	$\log_a 0.5$

Aufgabe 10.5 (Seite 315)

① Integrieren Sie den Faktor in den Logarithmus.

a) $2 \cdot \log_a 4$	$\log_a 4^2$	$\log_a 16$
b) $3 \cdot \log_a 5$	$\log_a 5^3$	$\log_a 125$
c) $8 \cdot \log_a 2$	$\log_a 2^8$	$\log_a 256$
d) $2 \cdot \log_a \left(\frac{1}{3}\right)$	$\log_a \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\log_a \left(\frac{1}{9}\right)$
e) $-2 \cdot \log_a 5$	$\log_a 5^{-2}$	$\log_a \left(\frac{1}{25}\right)$
f) $-3 \cdot \log_a \left(\frac{1}{2}\right)$	$\log_a \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\log_a 8$
g) $-4 \cdot \log_a \left(\frac{1}{4}\right)$	$\log_a \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$	$\log_a 256$